

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. X, N. 8

Serie nona

1° Agosto 1953

Scattering Problems with Spin-Orbit Couplings.

T. REGGE and M. VERDE

Istituto di Fisica dell'Università - Torino

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Torino

(ricevuto il 5 Giugno 1953)

Summary. — With the aim of treating the scattering of neutrons by deuterons in presence of tensor forces or spin-orbit couplings we give here a variational principle which does not use Green's tensor. The method is an extension of that due to HULTHÉN for the case of two bodies and central forces. In section 1 we discuss the two-body case with tensor potentials, in section 2 the three-body case with central forces and finally we extend our treatment in the last section to the more general case of neutron-deuterons scattering with spin-orbit coupling.

Introduction.

The purpose of this investigation is to give a contribution to some collision problems of nucleons or complex nuclei. We are chiefly interested in the case of forces for which the total intrinsic spin is not a good quantum number.

We begin in section 1 with a variational method which allows the evaluation of the phases for the scattering of two nucleons in presence of the tensor force. This method is an extension of that given by HULTHEN ⁽¹⁾ for central forces in his second formulation. In the same section we discuss the connection of the new method with the old one due to SCHWINGER ⁽²⁾.

For collisions between complex nuclei we consider the specific case of neutron-deuteron scattering. In section 2 we have limited ourselves to central

⁽¹⁾ L. HULTHEN: *Arkiv. Mat. Astr. Fis.*, **35** A, n. 25 (1948).

⁽²⁾ F. ROHRICH and J. EISENSTEIN: *Phys. Rev.*, **75**, 705 (1949).

forces only, in order to formulate the variational method similar to that given by one of us ⁽³⁾, but in a form by far more advantageous for the actual calculation of the phases. This is again an extension of Hulthen's method for two bodies mentioned before.

Collision between complex nuclei can be treated in the same manner with only slight formal complications.

In the third section we give a further generalisation of the results obtained eliminating the restriction of central forces. As in section 2 we consider the neutron-deuteron case, but our considerations are of more general validity. We emphasize also the circumstance that possible many-body potentials may be fitted into the same formulation without bringing on new difficulties.

1. — The two-body case.

It will be sufficient to consider the triplet scattering only. The tensor force is indeed active merely for $S = 1$ and mixes for a given total angular momentum J the two orbital momenta $l = j \pm 1/2$.

We call, as usually, with u and w the radial components of the wave function corresponding to the two angular momenta $l = j \pm 1/2$. The equation of motion then gives the well known system of coupled differential equations for u and w :

$$(1) \quad \begin{pmatrix} L_{j-1} & 0 \\ 0 & L_{j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & g \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix},$$

where L_j is the differential operator,

$$(2) \quad L_j = \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{j(j+1)}{r^2},$$

is the kinetic energy for the relative motion, f, g, h , are functions of r . g is proportional to the tensor potential only, whereas f and h include also the central potential. The system (1) reduces to a set of two independent ordinary differential equations in absence of tensor force ($g = 0$).

The radial component v belonging to the orbital momentum $l = J$ evolves separately because it corresponds to a different parity than u and w .

v obeys an ordinary differential equation for which it is possible to formulate the same variational principle as in the case of central forces.

We have therefore to consider merely the system (1).

(³) M. VERDE: *Helv. Phys. Acta*, **22**, 339 (1949).

The asymptotic behaviour of u and w for $r \rightarrow \infty$ is

$$(3) \quad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 I_{j-1}^r + \beta_1 I_{j-1}^s \\ \alpha_2 I_{j+1}^r + \beta_2 I_{j+1}^s \end{pmatrix},$$

where α and β are constants and I_j^r, I_j^s are the two solutions regular respectively singular at the origin of the equation

$$L_j(I_j) = 0.$$

One has

$$(4) \quad \begin{cases} I_j^r = \sqrt{\frac{\pi k r}{2}} \mathcal{J}_{j+1/2}(kr) \\ I_j^s = \sqrt{\frac{\pi k r}{2}} (-1)^j \mathcal{J}_{-(j-1/2)}(kr), \end{cases}$$

where $\mathcal{J}_j(kr)$ is the Bessel function of order j .

Once fixed the constants β the integration of system (1) allows determining the α . They are related to each others by linear homogeneous transformations:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

which we shall briefly indicate $\alpha = K \cdot \beta$ in matrix notation.

The matrix K is real and symmetric, its eigenvalues are $\cot \delta_\alpha$ and $\cot \delta_\beta$. δ_α and δ_β are the two phases. The orthogonal transformation

$$u = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix},$$

which diagonalizes K provides the third parameter needed together with $\cot \delta_\alpha$ and $\cot \delta_\beta$ in order to evaluate the differential cross section.

The problem of physical interest consists in the determination of the matrix K .

Let us consider the integral expression

$$(5) \quad \mathcal{J} = k(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) - \int_0^\infty (u, w) O \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} dr,$$

where O is the real symmetric operator

$$(6) \quad O = \begin{pmatrix} L_{j-1} - f & -g \\ -g & L_{j+1} - h \end{pmatrix}.$$

We rewrite (5) in matrix notation as follows:

$$(7) \quad \mathcal{J} = k\tilde{x} \cdot \beta - \int_0^\infty \tilde{x} O x \, dr,$$

x , α and β indicate the matrices $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, while \tilde{x} and $\tilde{\beta}$, $\tilde{\alpha}$ are their transposed.

We shall now prove that the integral (7) is stationary if x is a solution of (1) satisfying to the asymptotic conditions (3) with β fixed.

Conversely the requirement $\delta\mathcal{J} = 0$ for any variation δx with the same restriction at infinity implies $Ox = 0$.

Stationarity of \mathcal{J} and solutions of system (1) are therefore equivalent. Considering a trial solution $x(c)$ depending from a certain number of parameters c it is possible to determine then by means of the equations:

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha} = 0.$$

The proof of our assert is straightforward. For the first variation of (7) one has indeed:

$$(8) \quad \delta\mathcal{J} = k\delta\tilde{x} \cdot \beta - \int_0^\infty \delta\tilde{x} O x \, dr - \int_0^\infty \tilde{x} O \delta x \, dr.$$

Furthermore

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (\tilde{x} \cdot O \delta x - \delta\tilde{x} \cdot O x) \, dr &= \int_0^\infty \{ (u L_{j-1} \delta u - \delta u L_{j-1} u) + (w_{j+1} \delta w - \delta w L_{j+1} w) \} \, dr = \\ &= (u \delta u' - \delta u' u) \Big|_0^\infty + (w \delta w' - w' \delta w) \Big|_0^\infty = k \cdot \delta\tilde{x} \cdot \beta, \end{aligned}$$

where the dash indicates the derivate with respect to r and we used the relations (6), (3), and (2).

The (8) becomes

$$\delta\mathcal{J} = -2 \int_0^{\infty} \delta\tilde{x} \cdot O x \, dr,$$

which serve to prove the equivalence of $\delta\mathcal{J} = 0$ and $Ox = 0$ as we asserted.

For the actual evaluation of the matrix K , by means of the variational method just described, it is convenient to generalize the same ansatz suggested by HULTHEN in the case of central forces.

One has to put:

$$(9) \quad \begin{cases} u = \alpha_1 I_{j-1}^r + y_1, \\ w = \alpha_2 I_{j+1}^r + y_2, \end{cases}$$

where y_1 and y_2 are trial functions which fulfill the boundary conditions for $r = 0$ and $r = \infty$ as required for the validity of the method. The y 's can be chosen linear in the variational parameters c .

Putting

$$I = \begin{pmatrix} I_{j-1}^r & 0 \\ 0 & I_{j+1}^r \end{pmatrix},$$

one can write (9) as

$$x = I\alpha + y$$

and (7) as

$$\mathcal{J} = k\tilde{\alpha} \cdot \beta - \int_0^{\infty} (\tilde{\alpha} I + \tilde{y}) O (I\alpha + y) \, dr.$$

from the equality:

$$\int_0^{\infty} \tilde{\alpha} I O y \, dr = \int_0^{\infty} \tilde{y} O I \alpha \, dr + k\tilde{\alpha} \beta,$$

follows:

$$(10) \quad \mathcal{J} = - \left\{ \tilde{\alpha} E \alpha + 2 \left(\int_0^{\infty} \tilde{y} O I \, dr - k\tilde{\beta} \right) \alpha + \int_0^{\infty} \tilde{y} O y \, dr \right\},$$

where

$$E = \int_0^{\infty} IOI \, dr .$$

We have now to use the equations

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c} = 0 ,$$

in order to obtain the matrix K . The first of these gives

$$(11) \quad \tilde{\alpha} E = k \tilde{\beta} - \int_0^{\infty} \tilde{y} O I \, dr .$$

Substituting in (10) we get

$$(12) \quad \mathcal{J} = \tilde{\alpha} E \alpha - \int_0^{\infty} \tilde{y} O y \, dr .$$

The other equations $\partial \mathcal{J} / \partial c = 0$ that is $\frac{\partial}{\partial c} \int_0^{\infty} \tilde{y} O y \, dr = 0$ form a linear system in the c 's. Its solution, taking into account the usual asymptotic behaviour, can be written

$$y = Z \beta ,$$

with Z , a known matrix.

From (11) follows

$$\tilde{\alpha} E = \tilde{\beta} (k - N)$$

and

$$(13) \quad \alpha = \frac{1}{E} (k - N) \beta ,$$

where

$$N = \int_0^{\infty} \tilde{Z} O Z \, dr .$$

Hence (12) becomes

$$\mathcal{J} = \tilde{\beta} \left\{ (k - N) \frac{1}{E} (k - \tilde{N}) - F \right\} \cdot \beta,$$

with

$$F = \int_0^{\infty} \tilde{Z} O Z \, dr.$$

The matrix K which is real and symmetric is therefore

$$(14) \quad K = \frac{1}{k} \left\{ -F + (k - N) \cdot \frac{1}{E} \cdot (k - \tilde{N}) \right\}.$$

We can rewrite it in the form

$$K = K^0 - \frac{1}{k} (F + N K^0),$$

where $K^0 = (1/E)(k - \tilde{N})$ can be looked upon as a first approximation of K , as it appears from (13).

We will now, in analogy with the two body case, compare the variational method described above with SCHWINGER's ⁽⁵⁾.

Instead of our \mathcal{J} , SCHWINGER considers the integral expression

$$\mathcal{J}_s = \mathcal{J} - \int_0^{\infty} (\tilde{O}x) \cdot \frac{1}{U} \cdot (Ox) \, dr,$$

where $1/U$ is the inverse of the matrix

$$U = \begin{pmatrix} f & g \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Stationarity of \mathcal{J}_s and solution of (1), with the same boundary conditions,

⁽⁴⁾ J. BLATT and L. C. BIEDERHARN: *Phys. Rev.*, **86**, 399 (1949).

⁽⁵⁾ T. KATO: *Phys. Rev.*, **80**, 475 (1950).

are again equivalent. We have indeed

$$\delta(\mathcal{I} - \mathcal{I}_s) = 2 \int_0^\infty \widetilde{\delta(Ox)} \cdot \frac{1}{U} \cdot (Ox) dr.$$

We put furthermore

$$(15) \quad x = I\alpha + \int_0^\infty G(r, r') U(r') y(r') dr',$$

where G is the matrix defined by means of Green's appropriate functions $G_{j\pm 1}(r, r')$ solutions of the equation

$$(16) \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{j(j+1)}{r^2} \right) G_j(r, r') = \delta(r - r'),$$

$$G = \begin{pmatrix} G_{j-1}(r, r') & 0 \\ 0 & G_{j+1}(r, r') \end{pmatrix}, \quad G_j(r, r') = \begin{cases} -\frac{1}{k} I_j^r(r) I_j^s(r') & r < r' \\ -\frac{1}{k} I_j^r(r') I_j^s(r) & r > r'. \end{cases}$$

The functions $I_j^r(r)$ and $I_j^s(r)$ are defined by (4). y is the trial function. One has now to vary the y so that the auxiliary condition

$$(17) \quad -\frac{1}{k} \int_0^\infty I U y dr = \beta,$$

is fulfilled with fixed β 's. Being

$$Ox = -U(x - y),$$

the integral \mathcal{I}_s becomes

$$\mathcal{I}_s = k\tilde{\alpha} \cdot \beta + \int_0^\infty \tilde{y} U(x - y) dr,$$

from (16) follows

$$\int_0^\infty \tilde{y} U x dr = -k\tilde{\beta} \cdot \alpha + \int_0^\infty \tilde{y} U(x - I\alpha) dr,$$

and finally

$$(18) \quad \mathcal{I}_s = - \int_0^\infty \tilde{y} U y \, dr + \int_0^\infty dr \tilde{y}(r) U(r) \int_0^\infty dr' G(r, r') U(r') y(r').$$

It is also possible to eliminate the normalisation condition (17).

The great advantage of Schwinger's method lies in the fact that it is no longer necessary to respect any asymptotic behaviour in the choice of y , which can be done with large freedom. The major contribution to the integral (18) comes from distance r of the same order of magnitude as the extension of the nuclear forces.

On the other hand this advantage is a consequence of the variational ansatz (15) which is possible in virtue of our knowledge of Green's tensor (16).

For collision problems between complex nuclei where this knowledge fails it is the first method only that possesses practical importance.

We wish to observe, as a conclusion of our considerations, that the eigenvalues of the matrix K , that is the values of the $\cot \delta_\alpha$ and $\cot \delta_\beta$ given by the two methods, differ from each other by the quantity

$$\int_0^\infty \tilde{O} x \frac{1}{U} O x \, dr,$$

where x is an eigenvector of K .

The real quadratic form $\tilde{O} x (1/U) O x$ has a definite character if the discriminant Δ of U is greater than zero.

Its value, independent from j , results to be

$$\Delta = \left[\frac{M V_0}{\hbar^2} p(r) \right]^2 (1 - 4\gamma(r)) \cdot (1 + 2\gamma(r)),$$

where $p(r)$ gives the radial dependence of the central potential, V_0 its depth, $\gamma(r)$ is the ratio between the radial dependence of the tensor potential and the central one. In particular if the two potentials have the same radial dependence, as usually accepted, γ is a constant.

For

$$-1/2 < \gamma < 1/4,$$

it is

$$\Delta > 0.$$

In this case we can also state that for attractive forces Schwinger's $k \cot \delta$ is greater than the value given by the other method.

2. - Neutron-Deuteron scattering with central forces.

We have now to generalize the same formulation of the variational method given in the preceding section to the case of the elastic scattering of one nucleon by a complex nucleus, let us say a deuteron. This problem has been already treated by means of a variational approach corresponding to the first formulation of HULTHEN's two body case ⁽³⁾. There exists also a subsequent numerical evaluation of the cross section at small energies ⁽⁶⁾. The principal inconvenience of it, was the quadratic equation from which one had to obtain the phases. The choice of the true solution was made by using the exact integral formulas for the phases. The new formulation of the problem, we shall give here, avoids this troublesome procedure.

Let us consider the integral expression

$$(19) \quad \mathcal{J} = k\lambda - \frac{1}{3} \int \psi O \psi \, d\tau,$$

where O means the differential operator

$$O = \Delta_r + \Delta_q + k^2 - k_d^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} W,$$

$r = (\sqrt{3}/2)(r_3 - r_2)$ is proportional to the distance of nucleon 2 from 3 $q = -r_1 + (r_2 + r_3)/2$ is the distance of nucleon 1, from the center of masses of 2 and 3. Δ_r , Δ_q are the Laplace operators with respect to the coordinates r and q , $\mu = (2/3)M$ the reduced mass of the incident neutron, $\hbar k^2/2\mu$ its kinetic energy, $-\hbar k_d^2/2\mu = -|E_\alpha|$ the deuteron's binding energy, W the total interaction of the system.

The wave function ψ belongs to a given value L of the orbital momentum and S of the spin. It can be chosen real.

We have again to prove, that equation of motion $O\psi = 0$ and stationarity of \mathcal{J} (cfr. (19)) are equivalent.

Here also one has to fulfill a condition to infinity ($q \rightarrow \infty$) given by

$$\psi_\infty = (\lambda I_L'(kq) + I_L^s(kq)) \frac{1}{\sqrt{kq}} Y_L(\omega_d) \cdot \varphi_d(r) \cdot \chi_d,$$

and varying the parameter $\lambda = \cot \delta_{L,s}$ too.

⁽⁶⁾ A. TROËSCH and M. VERDE: *Helv. Phys. Acta*, **24**, 39 (1950).

In the preceding formula we have put

I_L^r, I_L^s for the usual functions defined by (4),

$Y_L(\omega_q)$ for the spherical harmonics of the angles of \mathbf{q} and $L_z = 0$,

$\varphi_d(\tau)$ for the deuteron's spacial configuration in its ground state and χ_d for its spin eigenfunction.

The first variation of the integral (19):

$$(19) \quad \mathcal{J} = k\lambda - \frac{1}{3} \int \psi(\mathcal{C} - U) \psi \, d\tau,$$

where

$$(20) \quad \mathcal{C} = \Delta_r + \Delta_q + k^2 - k_d^2$$

and

$$U = \frac{2\mu}{3} W,$$

becomes

$$\delta \mathcal{J} = k \delta \lambda - \frac{1}{3} \int \{ \delta \psi (\mathcal{C} - U) \psi - \psi (\tau - u) \delta \psi \} d\tau.$$

We have furthermore

$$\begin{aligned} \int \{ \psi (\tau - u) \delta \psi - \delta \psi (\tau - u) \psi \} d\tau &= \int \{ \psi (\Delta_r + \Delta_q) \delta \psi - \delta \psi (\Delta_r + \Delta_q) \psi \} d\tau = \\ &= 3 \int (\psi \Delta \delta \psi - \delta \psi \Delta \psi) d\tau = 3k \delta \lambda. \end{aligned}$$

Hence

$$\delta \mathcal{J} = -\frac{2}{3} \int \delta \psi O \psi \, d\tau.$$

This is sufficient to prove our assert.

For the actual calculations it is advisable to go on as in the case of the first formulation ⁽³⁾ ^(*). We have to write, e.g. for $S = 1/2$ the two spacial

components ψ' and ψ'' of the wave function (which belong to the two dimensional representation of the permutation group of three elements), in the following way:

$$\psi' = T'(\psi_\infty + \xi),$$

$$\psi'' = T''(\psi_\infty + \xi),$$

where T' and T'' are the symmetry operators defined by

$$\begin{cases} T' = \frac{\sqrt{3}}{2} \{(13) - (12)\}, \\ T'' = -(23) + \frac{1}{2} \{(13) + (12)\}, \end{cases}$$

and $\xi(r, q)$ is a trial function symmetric in the coordinates of 2 and 3 rapidly vanishing as $q \rightarrow \infty$ and able to cancel the singularity of ψ_∞ at $q = 0$.

We write also

$$\psi' = \lambda \varphi'_r + y',$$

$$\psi'' = \lambda \varphi''_r + y'',$$

where dashes are indicating the results of the operation of T' and T'' . For instance:

$$\begin{aligned} \varphi'_\tau &= T' \left\{ \frac{I_L^1(kq)}{\sqrt{kq}} Y_L \cdot \varphi_a \right\}, \\ y' &= T' \left\{ \frac{I_L^2(kq)}{\sqrt{kq}} Y_L \varphi_a + \xi(r, q) \right\}, \end{aligned}$$

The integral (19) becomes

$$(21) \quad \mathcal{J} = -\{k\eta\lambda^2 + 2(N-k)\lambda + F\},$$

where

$$k\eta = \frac{1}{3} \int (\varphi'_r O \varphi'_r + \varphi''_r O \varphi''_r) d\tau,$$

$$N = \frac{1}{3} \int (y' O \varphi'_r + y'' O \varphi''_r) d\tau, \quad F = \frac{1}{3} \int (y' O y' + y'' O y'') d\tau.$$

With a choice of y linear in the variational parameters c , N is linear in c and F quadratic.

The stationarity condition with respect to λ gives:

$$\lambda = \frac{k - N}{k\eta}, \quad \lambda_{st.} = \lambda - \frac{1}{k}(F + \lambda N),$$

from (19) and (21) in full analogy with the two-body case.

The other conditions $\partial\mathcal{J}/\partial c = 0$ that is

$$k\eta \frac{\partial F}{\partial c} + 2(k - N) \frac{\partial N}{\partial c} = 0,$$

represent a linear system in the c which gives them.

The method here described has been applied to the evaluation of the first phase δ_0 at energy zero and with additive potential of Yukawa type (*).

3. — Neutron-Deuteron scattering with spin orbit coupling.

This section is devoted to the discussion of the case of more practical interest in which tensor forces or LS couplings have an important role. It is no longer possible to speak of L and S as good quantum numbers but only of the total angular momentum J or of its z component and of parity.

We limit ourselves as for central forces to the n-d scattering.

For each value of J and parity we have three states. They can be characterized by the total momentum j_1 and the orbital momentum l_1 of the scattered neutron. j_1 may assume the three values $J-1$, J , $J+1$; and l_1 can be equal to $j_1 + 1/2$ or $j_1 - 1/2$ in dependance of the considered parity.

We have of course three phases δ for given J and parity. The corresponding K matrix has three rows and three columns.

The integral expression required to be stationary is

$$(22) \quad \mathcal{J} = k\beta^{\dagger} \cdot \alpha - \frac{1}{3} \int x^{\dagger}(\tau - u)x d\tau,$$

where $\mathcal{C} = U$ is the usual operator defined in (20), x is the configuration of the system the asymptotic behaviour of which reproduces a free neutron and a deuteron in its ground state.

(*) The numerical results, still in progress, and the details for the evaluation of the integrals will soon appear in this review.

We write

$$x \simeq I' \alpha + I^s \beta ;$$

I' and I^s being diagonal matrices the elements of which, on the principal diagonal, are the three configurations of given J and parity, corresponding to the three values of j_1 . As before in I' the spherical waves with asymptotic radial behaviour $\sin(kq - l_1\pi/2)/kq$ appear, and in I^s the ones with behaviour $\cos(kq - l_1\pi/2)/kq$.

α and β are constant matrices with one column and three rows.

α^\dagger and β^\dagger are their hermitian conjugates. The matrix K which has to be determined is defined by

$$\alpha = K \cdot \beta .$$

Following the same procedure of section 2 it is easy to prove that

$$\delta \mathcal{J} = -\frac{1}{3} \left\{ \int \delta x^\dagger O x \, d\tau + \int (O x)^\dagger \delta x \, d\tau \right\} ,$$

where $O = \mathcal{C} - U$.

This gives again the equivalence of $\delta \mathcal{J} = 0$, by arbitrary independent variations of δx and δx^\dagger fulfilling the usual condition at infinity, with the equation of motion: $Ox = 0$.

Putting

$$x = I' \alpha + y$$

from (22) follows

$$(23) \quad \mathcal{J} = - \left\{ \alpha^\dagger E \alpha + 2 \left(\int y^\dagger O I' \, d\tau - k \beta^\dagger \right) \cdot \alpha + \int y^\dagger O y \, d\tau \right\} ,$$

where

$$E = \int I' O I' \, d\tau .$$

The condition

$$\partial \mathcal{J} / \partial \alpha = 0 ,$$

gives

$$\alpha^\dagger E = k \beta^\dagger - \int y^\dagger O I' \, d\tau ,$$

and (23) becomes

$$\mathcal{J} = \alpha^\dagger E \alpha - \int y^\dagger O y \, d\tau.$$

For the determination of the variational parameters c which appear in y we have following equations

$$(24) \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c^*} = 0,$$

which allow to obtain y as linear function of β

$$y = Z\beta.$$

Z being a known matrix.

The K matrix is determined as in the two body case with tensor forces. We have

$$K = \frac{1}{k} \left\{ -F + (k - N) \frac{1}{E} (k - N^\dagger) \right\},$$

with

$$N = \int Z^\dagger O I^\dagger \, d\tau \quad \text{and} \quad F = \int Z^\dagger O Z \, d\tau.$$

K is a hermitian matrix.

It is an advantage in this last case too to choose the trial functions y linear in the complex parameters c . The (24) form then a linear system in the c or in their complex conjugates c^* .

RIASSUNTO

Con il proposito di risolvere il problema dell'urto neutrone-deutone in presenza di forze tensoriali e di accoppiamenti spin-orbita, abbiamo formulato un principio variazionale che non fa uso del tensore di Green. Si tratta di un'estensione di un metodo dato da HULTHEN per il caso di forze centrali e dell'urto tra due nucleoni. Nel primo paragrafo esaminiamo l'urto fra due corpi con forze tensoriali, nel secondo il caso dei tre corpi con forze centrali e nell'ultimo ne diamo la generalizzazione al caso dell'urto neutrone-deutone con accoppiamento spin-orbita.

Diffrazione dei raggi X in soluzioni acquose di formaldeide.

F. CENNAMO e E. TARTAGLIONE

Istituto di Fisica dell'Università - Napoli

(ricevuto il 6 Giugno 1953)

Riassunto. — Si riporta l'andamento dei raggi X diffratti da alcune soluzioni acquose di formaldeide, dal quale sembra che si possa ritenere che in esse sono presenti raggruppamenti caratteristici sia del solvente che del soluto.

Il BACCAREDDA ⁽¹⁾, in misure di velocità di propagazione degli ultrasuoni in soluzioni acquose di formaldeide, ha trovato che tale velocità aumenta con la concentrazione mantenendosi sempre al di sopra della curva relativa a mescolanze ideali. Poichè d'altra parte la densità varia linearmente, se ne deduce che la variazione di velocità deve dipendere dal modo col quale varia la compressibilità del sistema che quindi diminuisce con l'aumentare della concentrazione di formaldeide.

Questa diminuzione di compressibilità, non lineare e maggiore di quella che competerebbe alle mescolanze ideali, starebbe, secondo l'A., ad indicare la formazione di associazioni tra molecole di acqua e di glicol metilenico. Questi gruppi di molecole associate introducono nel sistema, secondo il BACCAREDDA, elementi di minore compressibilità a causa della grande energia di coesione esercitantesi tra gli elementi di uno stesso gruppo.

A questa interpretazione proposta dal BACCAREDDA si oppone SETTE ⁽²⁾, il quale fa rilevare che è possibile applicare alle soluzioni in esame le considerazioni già svolte dal PARSHAD a proposito delle soluzioni acquose di alcool

⁽¹⁾ M. BACCAREDDA: *Gazz. Chim. Ital.*, **78**, 735 (1942); *La Ric. Scient.*, **3**, 321 (1950).

⁽²⁾ D. SETTE: *La Ric. Scient.*, **10**, 1181 (1949).

metilico, alcool etilico, ecc. Il SETTE fa osservare che la diminuzione della compressibilità non è indizio di formazione di associazioni: infatti se da una parte aumenta l'energia di coesione tra le molecole di uno stesso gruppo, dall'altra diminuisce quella tra gruppo e gruppo rispetto a quella che si avrebbe tra le molecole non associate, per cui le soluzioni in cui le molecole dei componenti sono associate devono presentare un aumento e non una diminuzione di compressibilità. Secondo il SETTE quindi, sia l'acqua che la formaldeide, sarebbero liquidi associati allo stato puro ma non in soluzione.

In soluzione, invece, l'acqua spezzerebbe le associazioni tra le molecole di formaldeide e questa a sua volta spezzerebbe le associazioni della prima.

Noi abbiamo voluto vedere se è possibile portare un contributo al problema ricorrendo ad altri mezzi ed allo scopo abbiamo studiato la diffrazione di raggi X prodotta dalle soluzioni acqua-formaldeide.

Il dispositivo sperimentale utilizzato è quello descritto in altra nota ⁽³⁾ e sono state prese in esame le soluzioni corrispondenti alle seguenti concentrazioni molecolari di formaldeide (f_1) ed acqua (f_2):

f_1	f_2
0,000	1,000
0,023	0,977
0,043	0,957
0,082	0,918
0,091	0,909
0,141	0,859
0,154	0,846

Sono state eseguite due serie di misure e le lastre fotografiche sono state esposte all'azione dei raggi X per la durata di 45 minuti per una serie e di 60 minuti per l'altra serie.

Sulla lastra, oltre al solito continuo dovuto a varie cause, si può notare, per ciascuna soluzione, un anello caratteri-

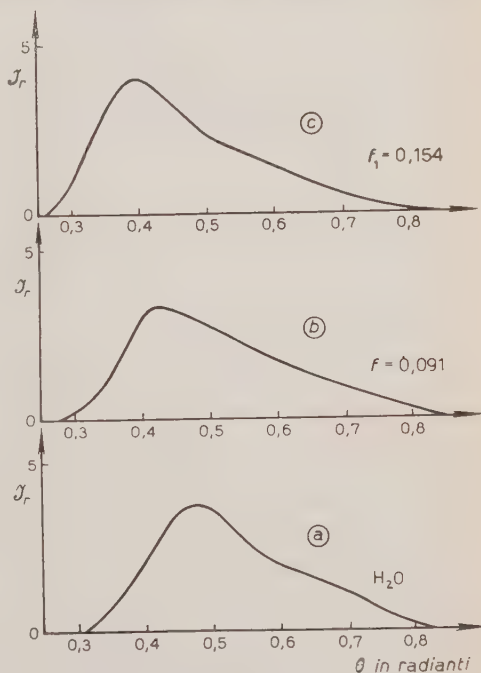


Fig. 1.

⁽³⁾ F. CENNAMO: *Nuovo Cimento*, **10**, 395 (1953).

stico. Per l'acqua allo stato puro, è da osservare che, relativamente al tempo di posa da noi impiegato, compare uno solo dei tre aloni caratteristici e precisamente quello relativo alla distanza reticolare di 3,25 Å.

Dalle microfotometrie, eseguite per ciascuna lastra in corrispondenza della direzione di un diametro dell'anello, sono state dedotte le curve: intensità-angoli di diffrazione col metodo descritto nella citata nota ⁽³⁾.

In fig. 1 sono riportate le curve relative all'acqua ed alle soluzioni corrispondenti alle concentrazioni molecolari: $f_1 = 0,091$; $f_1 = 0,154$.

Si osserva in primo luogo che non vi è notevole variazione tra le intensità misurate in corrispondenza del massimo, tra l'acqua (curva *a*) e le varie soluzioni (curve *b* e *c*). Si nota invece, all'aumentare della concentrazione di formaldeide, uno spostamento del massimo verso angoli di diffrazione più piccoli. Nella fig. 2 sono riportati i valori degli angoli di diffrazione, corrispondenti al massimo della intensità dei raggi diffratti, in funzione della concentrazione molecolare di formaldeide f_1 .

Abbiamo anche studiato, col metodo delle polveri, il residuo solido che si è ottenuto per

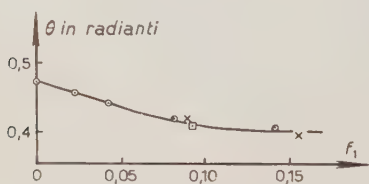


Fig. 2.

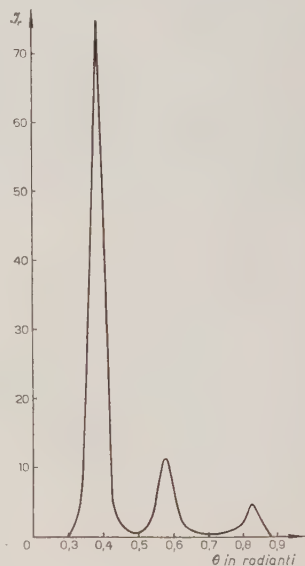


Fig. 3.

deposito dalla soluzione di formaldeide: si ottengono, con il tempo di posa impiegato (45 minuti), tre anelli, le cui distribuzioni di intensità, in funzione degli angoli di diffrazione, sono riportate in fig. 3.

Nella fig. 4 è invece riportato l'andamento della intensità dei raggi X diffratti dalla sospensione in acqua del residuo solido di cui innanzi: la distribuzione d'intensità ottenuta, che evidentemente è dovuta alla sovrapposizione degli spettri di diffrazione dei due componenti puri, acqua e residuo solido, presenta tre massimi in corrispondenza degli angoli, espressi in radianti: 0,375; 0,475; 0,575, di cui il primo e l'ultimo dovuti ai polimeri della formaldeide ed il secondo caratteristico dell'acqua.

Il massimo a 0,375 radianti appare molto netto; se però si pensa che col

diminuire delle dimensioni dei granuli costituenti la polvere in sospensione si ha un aumento nella larghezza della riga di diffrazione, se ne deduce che, al limite, per granuli molto piccoli in sospensione nell'acqua si dovrebbe ottenere una banda di diffrazione dal profilo avente una grande analogia con quello riportato in fig. 1 (curva c).

In tale ordine d'idee nella fig. 5 viene proposta un'analisi della curva di cui sopra: da tale analisi risulta che la curva di diffrazione caratteristica delle soluzioni acqua-formaldeide potrebbe immaginarsi dovuta alla sovrapposizione degli spettri di diffusione caratteristici dell'acqua e dei polimeri della formaldeide.

Nelle soluzioni acqua-formaldeide non sarebbero quindi presenti raggruppamenti misti di molecole dei due componenti, ma raggruppamenti di molecole di acqua e raggruppamenti di molecole di formaldeide e questi ultimi dello stesso tipo di quelli del residuo solido.

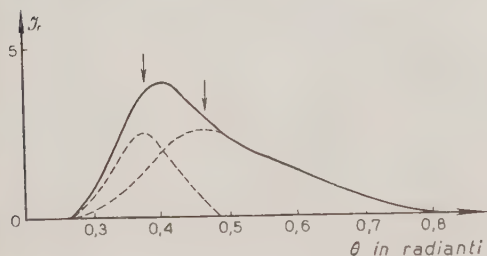


Fig. 5.

rispetto a quella ottenuta osservando il residuo sotto forma di polvere, può essere interpretata, secondo quanto si è detto, come dovuta ad una diminuzione delle dimensioni dei raggruppamenti di molecole dei complessi di formaldeide nella soluzione.

A riprova di quanto si è affermato sono state eseguite altre due fotografie delle quali in fig. 6 a) e 6 b) si riportano le microfotometrie.

La 6 a) è stata ottenuta esponendo la stessa lastra successivamente ai raggi diffratti dall'acqua pura e dalla soluzione di formaldeide di densità $d = 1,091$ e quindi di concentrazione molecolare $f_1 = 0,149$ per lo stesso tempo di posa. La sostituzione dei due liquidi nella vaschetta è stata operata senza spostare

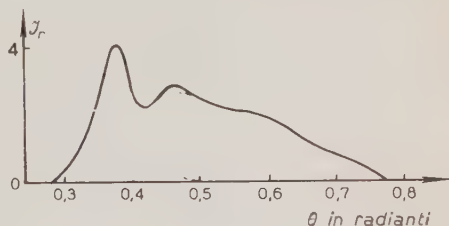


Fig. 4.

Lo spostamento quindi del massimo di diffrazione sarebbe dovuto alla sovrapposizione dei due effetti separati e non sarebbe quindi indizio di formazione di raggruppamenti caratteristici delle corrispondenti soluzioni. La maggiore larghezza della banda caratteristica della formaldeide, ottenuta dalla analisi della curva in questione, ri-

la vaschetta nè la lastra. La fig. 6 b) invece è stata ottenuta riempiendo la vaschetta con una soluzione contenente il 50% di acqua ed il 50% della soluzione di formaldeide di cui innanzi ed avente densità $d = 1,050$ e concentrazione molecolare $f_1 = 0,091$ ed esponendo la lastra fotografica all'azione dei

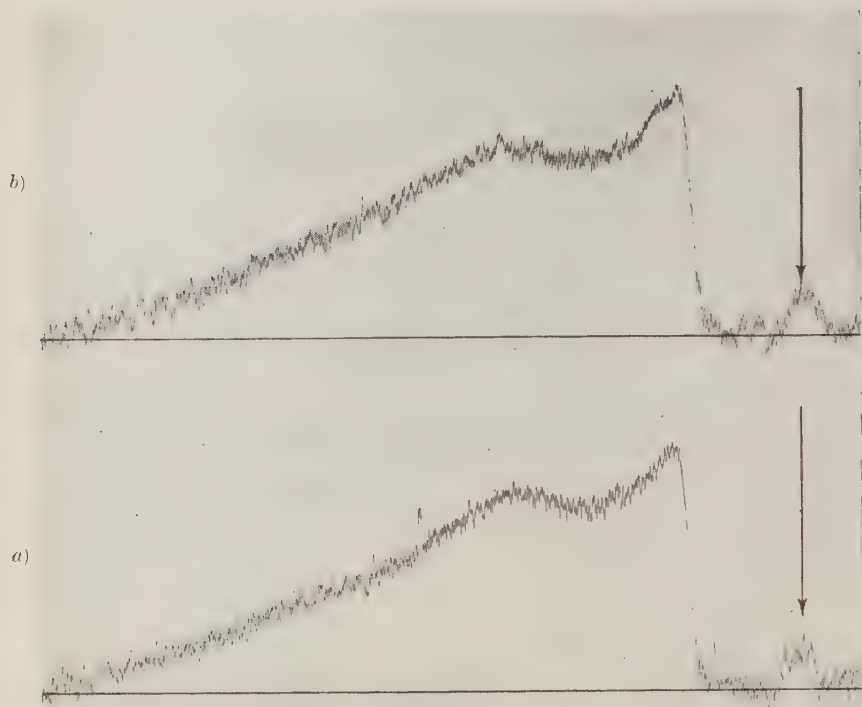


Fig. 6.

raggi X diffratti da tale soluzione per un tempo di posa doppio di quello impiegato per ciascuna esposizione di cui sopra.

Come si vede, l'andamento dei raggi diffratti dalla soluzione è perfettamente uguale all'andamento ottenuto sovrapponendo i due effetti. Le figg. 7 a) e 7 b) riportano, sempre in funzione degli angoli di diffrazione, le due curve di intensità relative alle microfotometrie 6 a) e 6 b) rispettivamente.

Concludendo, dai risultati ottenuti, sembra che si possa affermare:

a) Nelle soluzioni acqua-formaldeide sono presenti sia raggruppamenti di acqua che raggruppamenti caratteristici del soluto.

b) La costanza dell'intensità dei raggi diffratti è indice che non vi è variazione nel numero di questi raggruppamenti nella soluzione rispetto a quelli dei componenti puri.

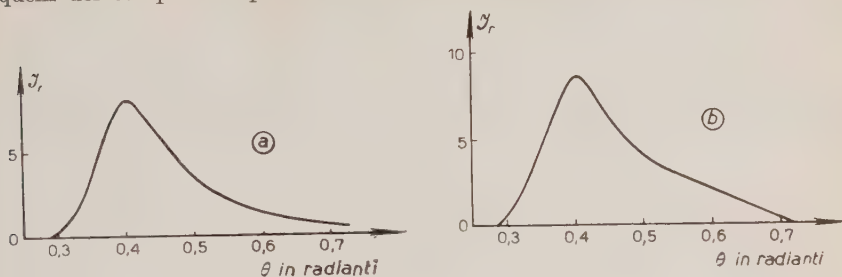


Fig. 7.

c) I raggruppamenti dovuti al soluto sembrano dello stesso tipo di quelli relativi ai prodotti della polimerizzazione.

Quest'ultimo fatto sarebbe in accordo con i risultati ottenuti in effetto Raman da HIBBEN ⁽⁴⁾, dai quali si deduce che in una soluzione acquosa col 37% di formaldeide non sono state trovate righe caratteristiche del legame C=O (1675-1725), mentre la riga a 1050 tipica del legame C—O è discretamente intensa.

Questo lavoro è stato eseguito nell'Istituto di Fisica Sperimentale della Università di Napoli.

Si ringrazia vivamente il prof. ANTONIO CARRELLI, Direttore dell'Istituto, per i mezzi messi a disposizione.

(4) J. H. HIBBEN: *Am. Chem. Soc.*, **53**, 2418 (1931).

SUMMARY

The shape of the spectra of X-rays diffracted by some solutions of formaldehyd in water is reported. From their examination one may reasonably assume that in the solutions are present characteristic groups of the solvent and of the solute as well.

Interaction Mean Free Path and Charge Exchange of the π -Mesons.

G. SALVINI

Istituto di Fisica dell'Università - Pisa

(ricevuto il 7 Giugno 1953)

Summary. — The nuclear properties of the charged π -mesons of high energy (kinetic energy between 200-1000 MeV) have been studied by observing the interactions in Carbon and Lead of the fast secondary particles (shower particles) emitted in cosmic ray nuclear events. The interactions have been observed in a large Cloud Chamber operated at 3200 m altitude; the Cloud Chamber was controlled with Geiger counters and with photomultipliers. The conclusions may be summarized in the following numbers. The total cross section σ_C of the pions in Carbon was measured by comparison with Lead. We found $\sigma_C = 247 \pm 60$ millibarns. This result agrees with those of other experiments with light nuclei. The general indication is that the cross section for pions of our energies is somewhat lower than the geometrical. We examined those secondary nuclear interactions in which electromagnetic component is emitted. The conclusion is that the average number \bar{n} of neutral π -mesons emitted for secondary nuclear interaction is $\bar{n} = .31 \pm .1$. The cross section σ_{ch} for charge exchange is in the limits $.16 \sigma_{total} < \sigma_{ch} < (.31 + .1) \sigma_{total}$. In an attempt to interpret our results we estimated the values of $\sigma_{ch}/\sigma_{total}$, using the results of ANDERSON, FERMI, NAGLE and YODH with pions of 100-200 MeV against Hydrogen. The resulting value $\sigma_{ch}/\sigma_{total} \cong 1/3$ is not in disagreement with our one.

Introduction.

The nuclear properties of the π -mesons (pions) have been recently studied by many Authors, in a range of energies from to 2000 MeV. The best results were obtained in the region of 40-200 MeV, with the pions created with the new accelerators. In this energy range the total cross section for the inter-

action of the pions against Carbon and heavier nuclei is rather close to the geometrical ^(1, 2).

As for the nuclei of Hydrogen and Deuterium, we have to recall the very interesting results of ANDERSON and FERMI ^(3, 4). The results of these authors do not disagree with the charge symmetry hypothesis, and the π^+ -Hydrogen cross-section exhibits an interesting increase up to 3 times the geometrical cross-section, for π^+ -mesons of 140 MeV.

Beyond 200 MeV of kinetic energy of the pions the results are much more uncertain, for they still depend on cosmic rays.

The cosmic ray measurements are not well defined, for the «beam» of pions is usually obtained from nuclear events produced either on top of a cloud chamber, or in absorbers surrounding nuclear plates. The «beam» has therefore a largely spread energy, say from 5 to 1500 MeV, and also contains a percentage of nucleons which has to be subtracted.

In any case, by comparing the results obtained with different geometrical dispositions, it now seems certain that the total pion-nucleus cross-section is not far from the geometrical for heavy and intermediate nuclei ⁽⁵⁾.

We may find less information in the literature *a)* on the interactions of the pions of energy higher than 200 MeV with lighter nuclei, *b)* on the details of the interactions of these pions with the nuclei.

With regard to point *a)*, some preliminary results have been given by SALVINI in a Cloud chamber research ⁽⁶⁾; recently, more complete results on the interactions of the charged pions in Carbon have been published by COOR and PICCIONI ⁽⁷⁾.

These authors found for the total cross section a value of 275 ± 25 millibarns, corresponding to a mean free path of 74 ± 7 g/cm². Their result is in our opinion more complete than the usual information of the Cloud chamber, on account of the larger statistics and better definition of the energy and sign of the particles. On the other hand it is more obscure in respect to the kind of interaction produced from the pion, in the Carbon layer.

With regard to point *b)*, the most detailed results were given by LOCK and YEKUTIELI ⁽⁵⁾, who discussed the main features of the pion-nucleus inter-

⁽¹⁾ R. MARTIN, H. L. ANDERSON and G. YODH: *Phys. Rev.*, **85**, 486 (1952).

⁽²⁾ G. BERNARDINI and F. LEVI: *Phys. Rev.*, **84**, 610 (1951) and quoted bibliography.

⁽³⁾ H. L. ANDERSON, E. FERMI, D. E. NAGLE and G. B. YODH: *Phys. Rev.*, **86**, 413 (1952).

⁽⁴⁾ H. L. ANDERSON, E. FERMI, D. E. NAGLE and G. B. YODH: *Phys. Rev.*, **86**, 793 (1952).

⁽⁵⁾ W. O. LOCK and G. YEKUTIELI: *Phil. Mag.*, **43**, 231 (1952).

⁽⁶⁾ G. SALVINI: *Nuovo Cimento*, **8**, 798 (1951).

⁽⁷⁾ R. L. COOR and O. PICCIONI: *Phys. Rev.*, **87**, 531 (1952).

actions in respect to the probability of scattering, absorption and charge exchange.

The aim of this note is to study the interactions of the pions in Carbon and Lead in respect of the total cross section, and to discuss the nature of the interactions of the pions with these kinds of nuclei.

1. - The apparatus.

We intend to discuss the secondary nuclear interactions (s.n.i.) which occurred in the plates of a large Cloud Chamber ($46 \times 46 \times 20$ cm³) by the shower particles emitted from preceding nuclear events (primary nuclear events, p.n.e.).

The p.n.e. were produced either in a layer of Carbon and Lead disposed above, or in NaI crystals placed inside the Cloud Chamber.

We used two different experimental dispositions, which are given in figg. 1, 2.

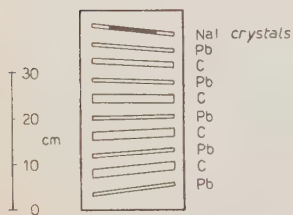


Fig. 1.

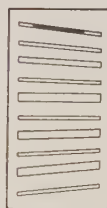
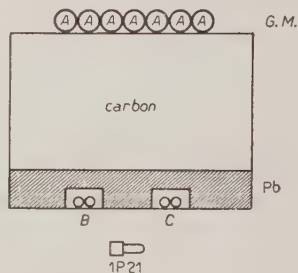


Fig. 2.

When controlling with the disposition of fig. 1, the p.n.e. mainly occurred in the NaI crystals. The p.n.e. were detected by the fluorescent light developed by the heavily ionizing particles emitted in the nuclear explosions; the secondary nuclear events were produced in the plates of Carbon and Lead by the shower particles of the primary nuclear events.

Details of the technique we used were already given in a previous paper ⁽⁸⁾.

⁽⁸⁾ G. SALVINI and Y. B. KIM: *Phys. Rev.*, **88**, 40 (1952).

When controlling with the disposition of fig. 2, the p.n.e. were mainly produced in the Carbon and Lead above the Cloud Chamber, and we studied the s.n.e. produced in the Carbon and Lead plates of the Cloud Chamber by the shower particles. The Cloud Chamber was triggered when a coincidence $A + B + C + \text{crystal}$ occurred. The bias of the amplifiers of the NaI crystal was set so that one relativistic particle traversing one of the crystals was enough to open the channel of the crystal to the coincidence. In this case the NaI crystals had about the function of a Geiger-Müller counter with a much better geometrical position.

The measurement was performed at 3500 m altitude (Echo Lake, Colorado). The discussion was developed during later months in Italy.

2. - Total cross section in Carbon of the charged secondaries of the p.n.e., and deduction for the charged pions.

We will estimate in the following the total cross-section for nuclear interaction in Carbon of the relativistic particles emitted in the p.n.e. We will call these relativistic particles secondary particles, and we shall reach at the end of this paragraph the conclusion that the secondary particles mainly are charged pions: therefore our estimate gives, with still large errors, the total cross-section of the fast pions in Carbon.

About 50% of the s.n.e. were obtained with the disposition of fig. 1, and the others with disposition 2. In the following we consider together all these s.n.i.

We will obtain the total cross section of the secondary particles in Carbon by comparing the numbers of the s.n.i. produced in the Carbon and Lead plates inside our Cloud Chamber. This is possible for the mean free path of the pions in Lead is now well known, after many measurements with different geometrical dispositions and different thicknesses of the target^(2, 10, 11), and also for the reason that our plates of Carbon and Lead were alternatively disposed one after the other, and each of them had about the same stopping power in respect to the ionisation losses.

We observed 51 s.n.i. in Carbon and 55 s.n.i. in Lead. By s.n.i. we mean here all those events involving the emission in the collision of at least one heavy or penetrating particle, and the scatterings greater than 10° .

It is evident that in first approximation the average amounts of materials L_c , L_{pb} measured for instance in g/cm^2 traversed by the shower particles in Carbon and in Lead respectively (cfr. figg. 1, 2) are proportional to the total amounts A_c , A_{pb} of Carbon and Lead we put inside the Cloud Chamber:

$$L_c : L_{pb} = A_c : A_{pb}.$$

More careful examination shows that a geometrical correction has to be introduced, in the sense that the ratio A_c/A_{Pb} is about 10% too high, and a more exact estimate gives:

$$(1) \quad \frac{L_c}{L_{Pb}} = .9 \frac{A_c}{A_{Pb}}.$$

Inside the Cloud Chamber, and measured in the vertical direction, there were 18 g/cm² of Carbon (4 Plates) and 39 g/cm² of Lead (5 Plates). If we indicate by λ_{Pb} , λ_c the mean free path of the shower particles in Lead and in Carbon we have:

$$(2) \quad \lambda_c = \lambda_{Pb} \frac{55}{51} \times \frac{L_c}{L_{Pb}} = \lambda_{Pb} \frac{55}{51} \times .9 \times \frac{18}{39} = \lambda_{Pb} \times .45,$$

where 55 and 51 are the numbers of secondary nuclear events we observed in Lead and Carbon respectively.

The weighted average from the results of GREGORY and TINLOT⁽⁹⁾, COCCONI⁽¹⁰⁾, LOVATI and coworkers⁽¹¹⁾, allow us to conclude that $\lambda_{Pb} = 180 \pm \pm 20$ g/cm², a value which is close to the geometric. Substituting the value of λ_{Pb} in (2) we have:

$$(3) \quad \lambda_c = 81 \pm 18 \text{ g/cm}^2; \quad \sigma_c = \frac{1}{n\lambda_c} = 247 \pm 60 \text{ millibarns}.$$

b) This value may be compared with that of COOR and PICCIONI⁽⁷⁾, of counters in hodoscopic arrangement. It is an interesting comparison, for this last result was obtained with a quite different technique. COOR and PICCIONI found $\sigma_c = 270 \pm 25$ millibarns. In table I we summarized the main results on the total cross-sections.

As we said before, one weak point in the interpretation of our measurement and of all those with Cloud Chamber we find in the literature is that the percentage of pions among the secondary particles is not exactly known. ANNIS and BRIDGE, experimenting with a Cloud Chamber similar to ours in the same laboratory and with about the same kind of detector, found that the pions are 75% of the secondary relativistic particles⁽¹²⁾. The same percentage or higher may be deduced from the well known results of Bristol⁽¹³⁾; COOR and

⁽⁹⁾ B. P. GREGORY and J. H. TINLOT: *Phys. Rev.*, **81**, 675 (1951).

⁽¹⁰⁾ G. M. BRANCH and G. COCCONI: *Phys. Rev.*, **84**, 146 (1951).

⁽¹¹⁾ A. LOVATI, A. MURA, C. SUCCI and G. TAGLIAFERRI: *Nuovo Cimento*, **8**, 271 (1951) and quoted bibliography.

⁽¹²⁾ M. ANNIS and H. S. BRIDGE: *Phys. Rev.*, **86**, 589 (1952).

⁽¹³⁾ U. CAMERINI, P. H. FOWLER, W. O. LOCK and H. MUIRHEAD: *Phil. Mag.*, **41**, 413 (1950).

TABLE I. — Mean free path of the charged pions in light elements, and comparison with the best present value of the mean free path in Lead.

Method	Authors	Mean free path	Material	Observed cross section Geometrical cross section	Energy
Geiger counters (Odoscope)	COOR and PICCIONI ⁽⁷⁾	74 ± 7	Carbon	$\frac{270 \text{ millibarns}}{360 \text{ millibarns}} = .75$	$\geq 400 \text{ MeV}$
Cloud chamber	SALVINI (present experiment)	81 ± 18	Carbon	$\frac{247 \text{ millibarns}}{360 \text{ millibarns}} = .69$	$\geq 200 \text{ MeV}$
Cloud chamber	GREGORY and TINLOT ⁽⁸⁾	164 ± 50	Alluminium	$\frac{273 \text{ millibarns}}{610 \text{ millibarns}} = .45$	$\geq 200 \text{ MeV}$
Cloud chamber	Weighted average from references ^(8, 10, 11)	180 ± 20	Lead	$\frac{1900 \text{ millibarns}}{2400 \text{ millibarns}} = .79$	$(\geq 200 \text{ MeV})$

PICCIONI ⁽⁷⁾ estimated that the percentage in their case was about 80%; their measurement was performed at about the same altitude than our one, and the selection in the events with their disposition could not be noticeably different.

Therefore we assume from now on that 75% of the secondaries we are considering in our experiment are pions, and 25% are protons, while we keep in mind that a more direct knowledge on this point would be desirable.

With this assumption, considering that the mean free path in Carbon by protons of 300 MeV or more varies between and 2 times the geometric ⁽¹⁴⁾, we conclude that (3) still represents the mean free path of the pions in the Carbon.

c) The energies of the pions are hard to define. Examination of the tracks of the secondary particles we considered shows that $\sim 20\%$ of the tracks producing nuclear interactions scatter in the plates more than ~ 3 degrees. An average scattering angle of 3° in Lead corresponds to a pion of 200 MeV. So we can assume that 80% of the interacting pions have an energy beyond 200 MeV. Beyond this limit the energy distribution is probably comparable with the one given by the Bristol group ⁽¹³⁾, for the pions from the nuclear events. We did not see as many low energy pions as they found, due also to the absorption of the low energy pions in the producing layers.

Both the results of COOR and PICCIONI and our present ones seem to give

⁽¹⁴⁾ J. BALLAM: *Phys. Rev.*, **86**, 591 (1952); W. D. WALKER, S. P. WALKER and K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **80**, 546 (1950).

an indication than the total cross-section for pion-nucleus scattering in Carbon is perhaps somewhat lower than the geometric (265 millibarns, against 360 millibarns). The results in Carbon for pions of 133 MeV, by MARTIN, ANDERSON and YODH ⁽¹⁾, have given 360 ± 40 millibarns, i.e. the geometric value.

We could have followed another method to estimate λ_c , which is the most usual ⁽¹¹⁾: to divide the total g/cm² of trasversal of the Carbon plates, by the number of s.n.i. in Carbon.

This direct method involves many corrections, and the advantages of estimating λ_c by comparison with λ_{pb} appear if we consider how many experiments in Lead, of the same kind of the present one with Carbon, were necessary to arrive to the value of λ_{pb} that we used above. We examined part of the film in order to get λ_c with the direct method: the result was in agreement with (3), with a larger error.

In table I we summarize our results and those given by other authours. In particular we remember the results of GREGORY and TINLOT ⁽⁹⁾ in Aluminium: 164 ± 50 , which also gives an indication of a remarkable transparency.

3. - The kind of interation of the pions in Carbon and Lead.

a) The fate of the pion in the collision with a nucleus will probably be one of the following:

- 1) it emerges as a charged meson,
- 2) it emerges as a neutral meson (charge exchange),
- 3) it is absorbed in the nucleus,
- 4) it creates other mesons.

The best indications of these different events were found by LOCK and YEKUTIELI ⁽⁵⁾, with nuclear emulsion technique. We consider their results very reliable in respect of point 1) and 4). The situation is not as clear in respect to the estimate of processes 2) and 3).

Processes 2) and 3) cannot be separated in each single event with the nuclear emulsion technique, but only their relative frequency can be statistically deduced by studying the average energy balance for a large community of nuclear events. By use of this method LOCK and YEKUTIELI concluded that for the pions in the energy range 160-1100 MeV, process 2) is by far more frequent than process 3). As a consequence they state that the charge exchange is at least as likely as the ordinary scattering, and the absorption is unimportant, a result which is not in disagreement with the possible theoretical previsions.

The energy balance method applied to pion interactions seems to us to give uncertain results, mainly due to the difficulty of estimating the energy spent for the acceleration of the invisible neutrons during the nuclear process. This difficulty is always present in the energy balance, and also in the proton induced stars (¹⁵); but with the pions induced stars it is still worse, for we do not know the sign of the charged emerging meson, and the percentage of the energy going to the proton and to the neutrons will strongly depend on the charge of the pion (¹⁵).

Furthermore, if we for instance assume that the energy is divided between protons and neutrons in the pions stars in the same way than in the protons stars, then we will probably underestimate the percentage of energy which goes to the neutrons in the stars produced by negative pions. This will lead to underestimate the energy spent in the star, and will produce a tendency to interpret an absorption as a charge exchange.

A more direct approach to the separation of processes 2) and 3) would be therefore desirable. The best help for this separation seems to us to be offered from the Cloud Chamber technique. The point would then be to observe the secondary nuclear interactions inside the Cloud Chamber, and to establish in how many cases there is evidence of electromagnetic component emerging from these interactions. The electrons observed in the s.n.i. will constitute the direct evidence that neutral mesons were emitted from the s.n.i., a fact that seems to have in charge exchange the easiest explanation. Of course an event of this kind never constitutes certainty of charge exchange: it could be creation of neutral mesons by nucleons or something else.

We will refer in the following the results we obtained when we looked for electromagnetic component in our s.n.i.

b) In table II we distributed the secondary nuclear events in Carbon and Lead according to their appearance in the Cloud Chamber.

We have $12 + 14 = 26$ cases (column (3)) where electromagnetic component appeared to be associated with the s.n.i. We will consider that electromagnetic component accompanies a s.n.i. when at least either one pair of electrons or one strongly scattering relativistic particle appeared, in coherence with the s.n.i. Most of the events exhibited more evidence than one pair.

(¹⁵) U. CAMERINI, J. H. DAVIES, P. H. FOWLER, C. FRANZINETTI, H. MUIRHEAD, W. O. LOCK, D. H. PERKIN and G. YEKUTIELI: *Phil. Mag.*, **42**, 1241 (1951).

The situation is illustrated by comparing the stars induced by positive and negative pions of the same energies as obtained by BERNARDINI and LEVY (²) in nuclear emulsion; by BYFIELD and coworkers (¹⁶) in Carbon plates. Notwithstanding the lower energy of their pions there is an indication that the energy balance is strongly affected from the assumptions on the relativistic numbers of protons and neutrons.

TABLE II. - *Distribution of the secondary nuclear interactions (s.n.i.) produced by the fast ionizing particles (the so-called shower particles, mainly pions), in Carbon and Lead.*

	(1)	(2)	(3)	(4)
In Carbon	51	31 (25)	12	6
In Lead	55	23 (17)	14	8

Col. (1): total number of s.n.i. observed in C and Pb respectively.

* (2): number of events of col. (1) with at least 1 outgoing shower particle. (The numbers in brackets refer to events in which no e.m. component is emitted with the shower particles).

* (3): number of events of col. (1) containing electromagnetic component.

* (4): number of events of col. (3) from which electromagnetic component only and no shower particle comes out.

These events could be interpreted either as a charge exchange or as a creation of neutral pions. The probability of direct emission of electrons or γ radiation should be much lower, according to present views.

When the s.n.i. contains both shower particles (we use here the term shower particle in the same sense as it is used in the nuclear emulsion research) and electromagnetic component, then the s.n.i. is rather likely to be an high energy event of the first type; when the electromagnetic component appears alone, or with grey tracks ionizing more than the minimum, then the event could be interpreted as a charge exchange.

If we consider the results of column (3) altogether, we deduce that neutral mesons were emitted in 26 out of 106 cases.

Assuming that one neutral meson was emitted in each case ⁽¹⁶⁾, this gives an average number of $26/106 = .25 \pm .06$ neutral mesons per s.n.i. Let us call this uncorrected number of neutral pions \bar{n}_{unc} .

But we have to estimate the probability that the electromagnetic component developing from the two decay photons of the neutral meson does not show in the Cloud Chamber. This estimate was made on the same lines as in a previous paper of SALVINI and KIM ⁽⁸⁾. The method mainly consists in estimating the probability of not observing a neutral pion emitted in a s.n.e. For a neutral pion of a given energy we estimated this probability by considering various energy divisions among the two decay photons.

We concluded from the estimate that \bar{n}_{unc} should be increased by about 25%, in order to get \bar{n} , the corrected average number of neutral mesons per s.n.i.: $\bar{n} = .31 \pm .1$.

⁽¹⁶⁾ H. BYFIELD, J. KESSLER and L. M. LEDERMAN: *Phys. Rev.*, **86**, 17 (1952).

The error we give here is larger than the statistical. This takes into account the presence of protons in our pion «beam» (§ 2, *b*). An estimate of the possible error due to the protons was made by examining the s.n.i. produced by neutrons (29 events) and assuming that the presence of electromagnetic component in the s.n.i. is as frequent in neutron induced events as in proton induced events.

c) Our value of \bar{n} may be compared, notwithstanding some difference in the definition, with the corresponding results of the nuclear emulsion technique; so LOCK and YEKUTIELI ⁽⁵⁾ found:

$$(4) \quad \bar{n} = .6 \pm .2 .$$

This value of \bar{n} is somewhat different from our value and the Cloud Chamber results point toward a lower frequency of neutral mesons than the nuclear emulsion technique. It is hard to discuss the difference, which is not beyond the statistical error. We only want to remark that the two techniques have just a tendency to opposite errors: in fact in the Cloud Chamber we search the evidence of the neutral mesons from the consequent electromagnetic cascade; in the nuclear emulsion we get the neutral mesons as a difference, after subtraction of all the other particles we can either see or imagine in the nuclear events.

4. - The charge exchange.

We had (column (4)) $6 + 8 = 14$ events in which electromagnetic component was emitted, and probably no shower particle. One of these events is given in fig. 3. The easiest explanation for this kind of s.n.i. is the hypothesis that the electric charge of the charged pion was «captured» in an interaction inside the nucleus, while the neutral meson emerged.

In this sense we can say that our events of column (4) constitute a reasonable evidence of the so called charge-exchange processes.

Events of columns (4) are 14 out of 106, which corresponds to $13 \pm 4\%$; by correcting with the same criterion we adopted for the estimate of n , the probability of a purely electromagnetic s.n.i. is $16 \pm 5\%$.

It is not easy to extract from the existing data, which mainly are those given by LOCK and YEKUTIELI ⁽⁵⁾ and our present ones, the cross section σ_{ch} for charge exchange in the charged pion-nucleus collision.

The events of column (3) probably include not only charge exchange, but also an unknown percentage of cases where neutral pions were created, with some other mechanism. Therefore the number \bar{n} itself is an upper limit for estimating the percentage of charge exchange cases, and we can only say that

charge exchange occurs in $31 \pm 10\%$ of the cases or less. For analogous reasons the percentage given above of the purely electromagnetic s.n.e., $16 \pm 5\%$, may constitute a lower limit. It is perhaps meaningless to stretch this analysis too much, due to relatively poor statistics and the existing lack of clear definition of the phenomenon of charge exchange.

In conclusion, we have for the cross-section for charge exchange, σ_{ch} , the following limits:

$$(5) \quad .16\sigma_t \leq \sigma_{ch} \leq (.31 + .1)\sigma_t,$$

where σ_t is the total cross-section of the charged pions against Carbon+Lead.

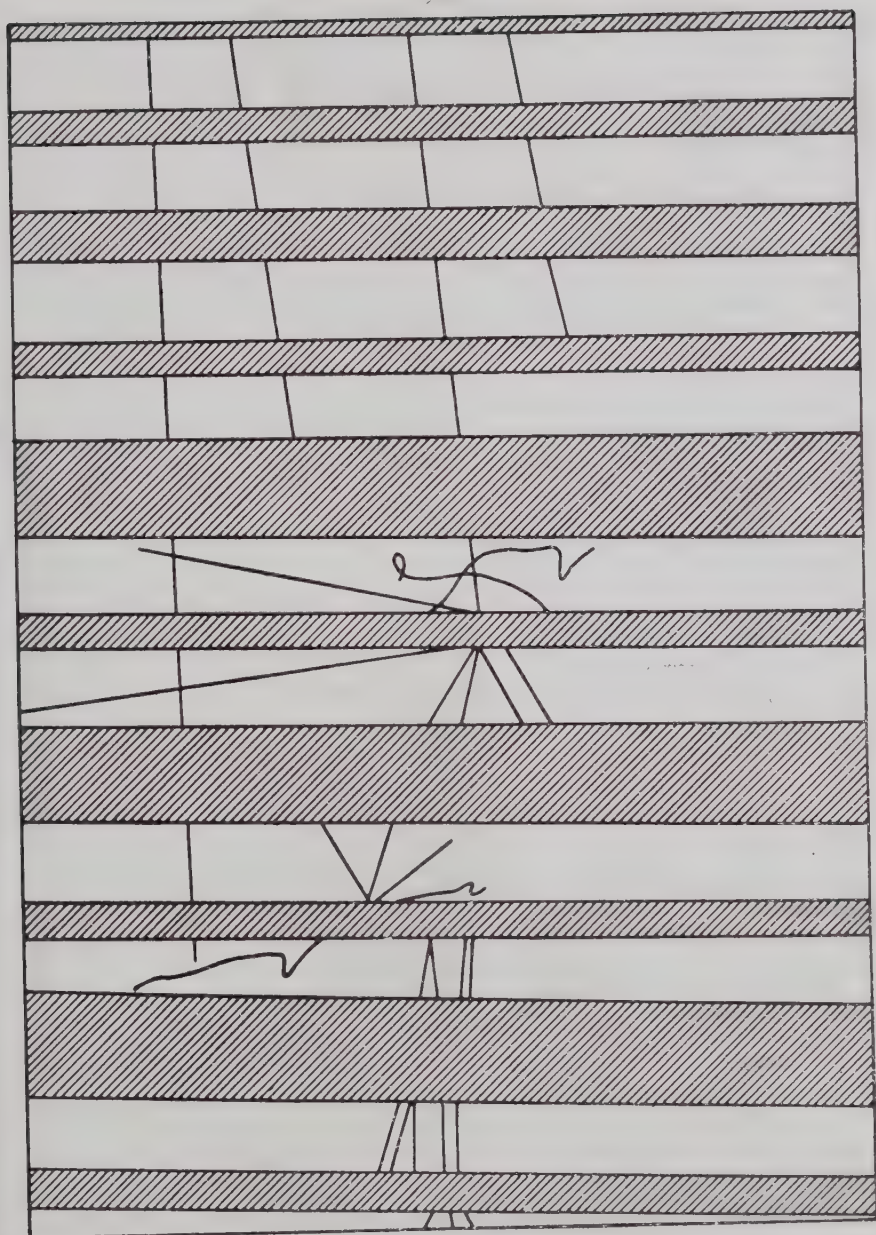
5. - As we can see from table II, we have (columns (1)) $51 + 55 = 106$ events at disposal. Out of them there are $31 + 23 = 54$ events (column (2)) in which at least one shower particle was emitted. A shower particle is defined in this case as a particle emitted from the s.n.i. and which ionizes close to minimum and traverses at least one plate without appreciable scattering. The events of column (2) are 51% of the total. Estimate of our geometry increases this percentage by about 10%, to allow for the shower particles which escaped traversing at least one plate. So we conclude that the events in which at least one relativistic particle was emitted are $56 \pm 10\%$ of the total.

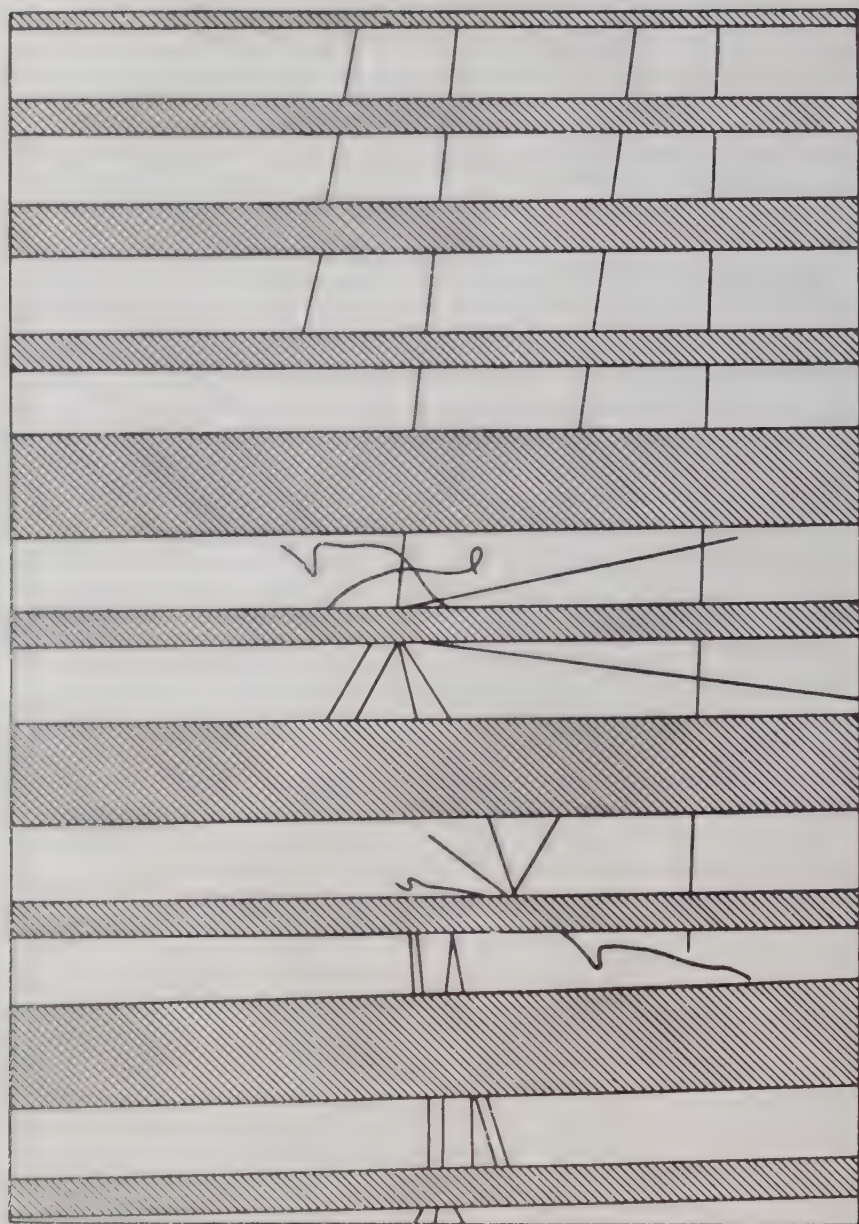
From inspection in the nuclear emulsion LOCK and YEKUTIELI arrived to the conclusion that the charged pions emerge again from the interaction in $44 \pm 12\%$ of the cases: let us call these cases ordinary scattering. If we assume that our events of column (2) are mainly ordinary scatterings, our percentage is in agreement with their results. We have to keep in mind that our estimate is more uncertain than their's, for the identification of the secondary particle is harder in our case.

In this discussion we have not separated the events in Carbon and Lead, due to the low statistics. We only want to remark that notwithstanding the very different size of the two nuclei, no statistically significant difference was observed between the events in Carbon and Lead, in respect to the number of shower particles and the frequency of appearance of the electromagnetic component. This may be also due to a rough compensation between the emission and absorption phenomena in the nucleus itself.

6. - Interpretation of our results on the charge exchange.

a) We briefly report here some estimate on the probability for charge exchange, as it could be guessed from the recent results of ANDERSON and FERMI^(3,4), on the scattering of the charged pions in Hydrogen and Deuterium.





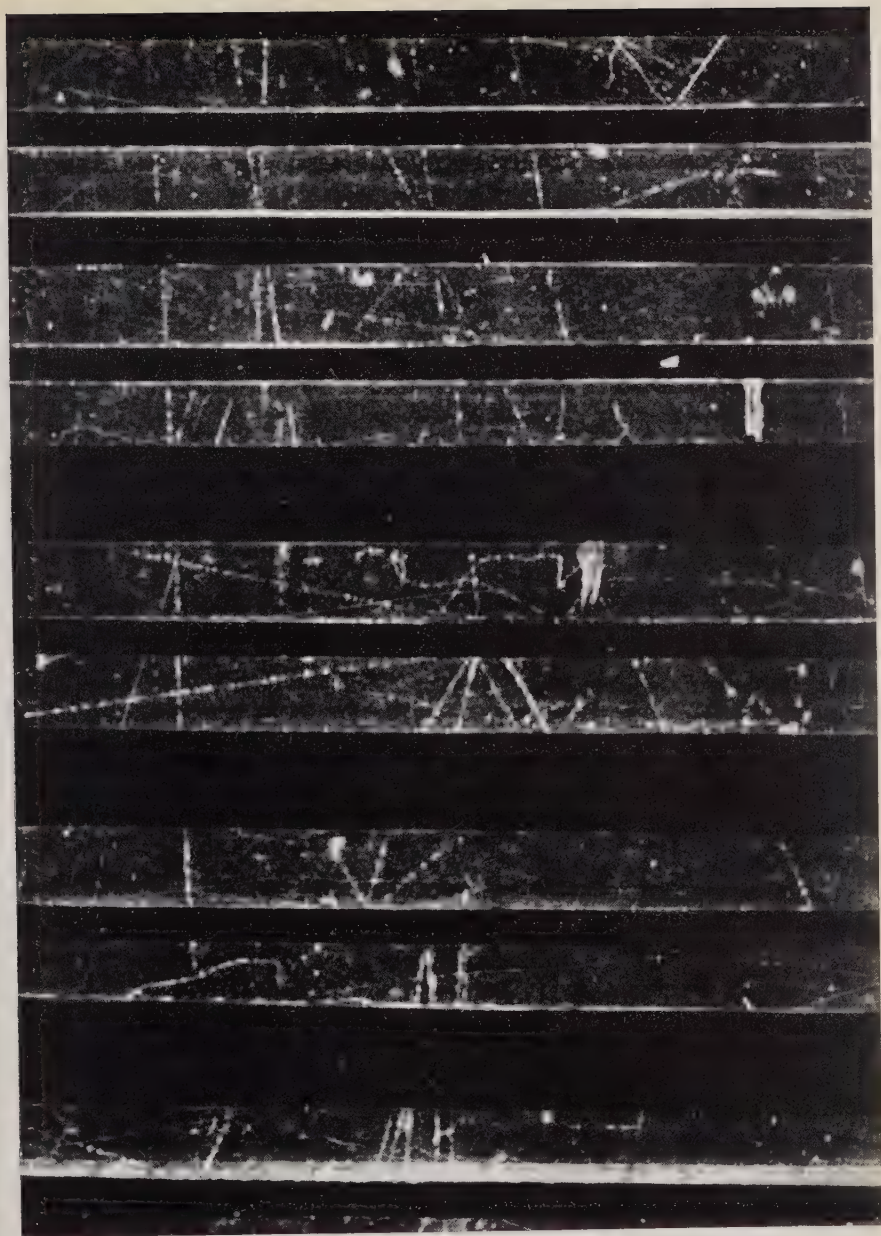
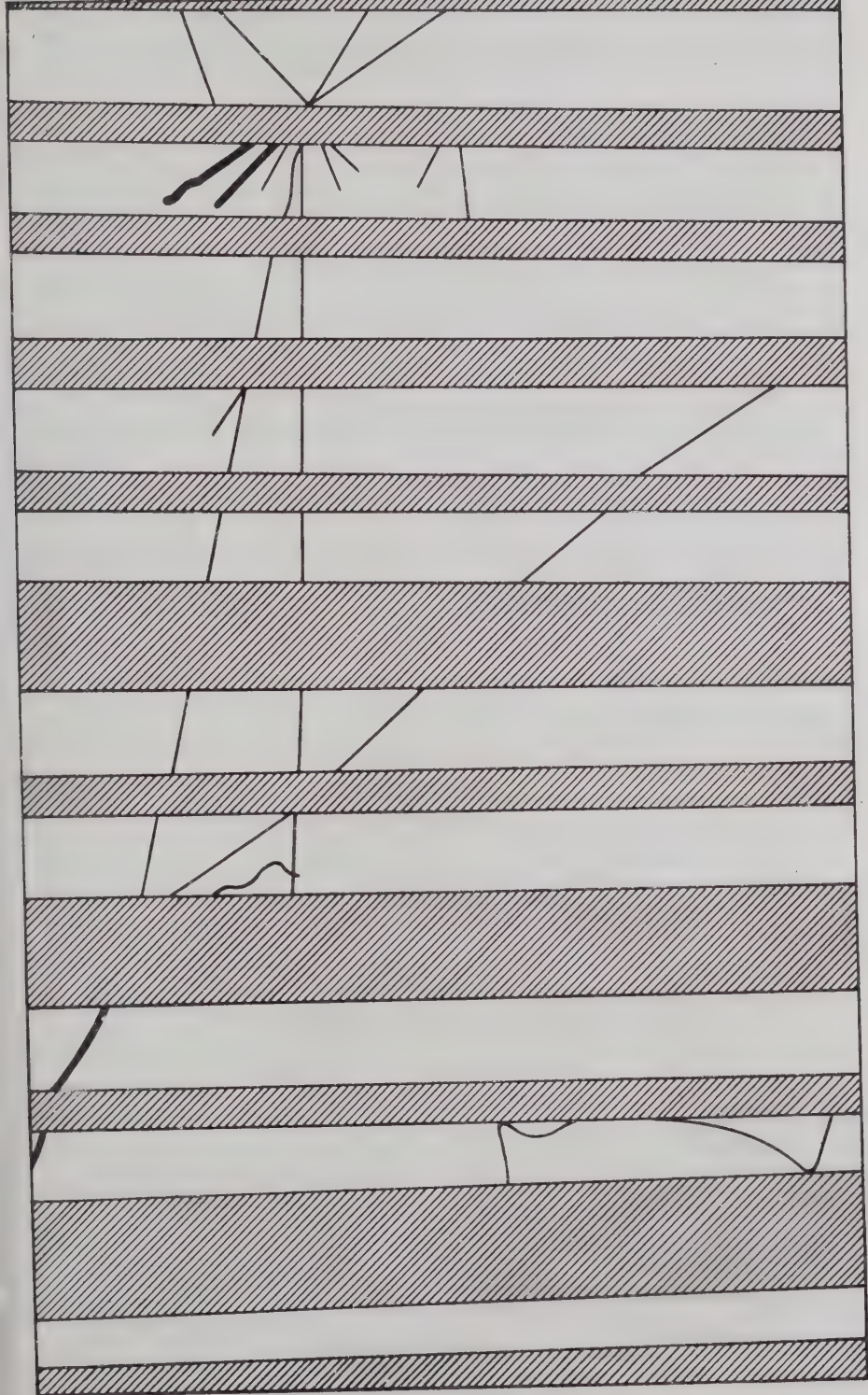
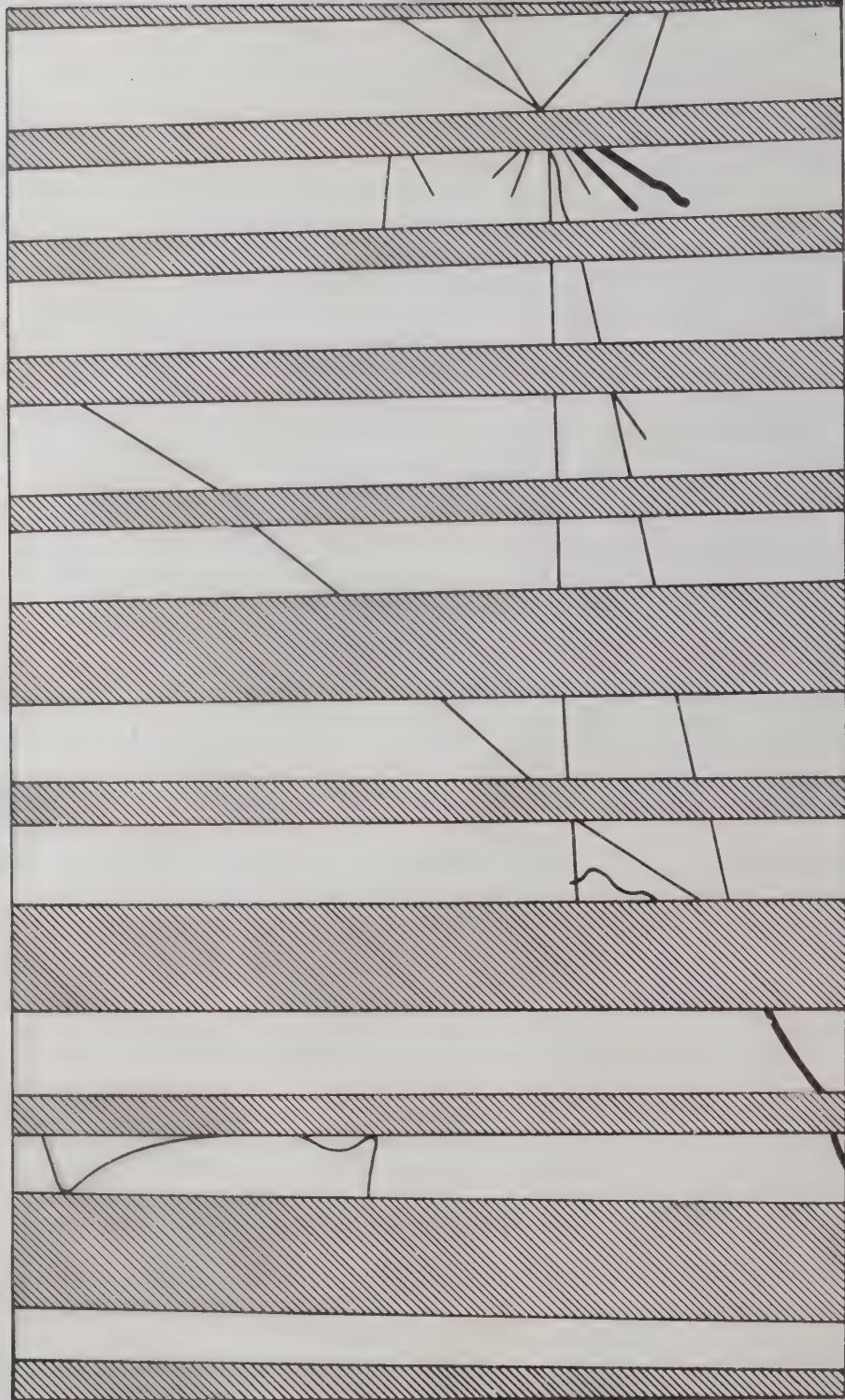


Fig. 3. - One penetrating particle interacts in a Pb plate. The penetrating particle disappears and gives rise to emission of e.m. component only. This is an interaction which could be interpreted as a charge exchange.





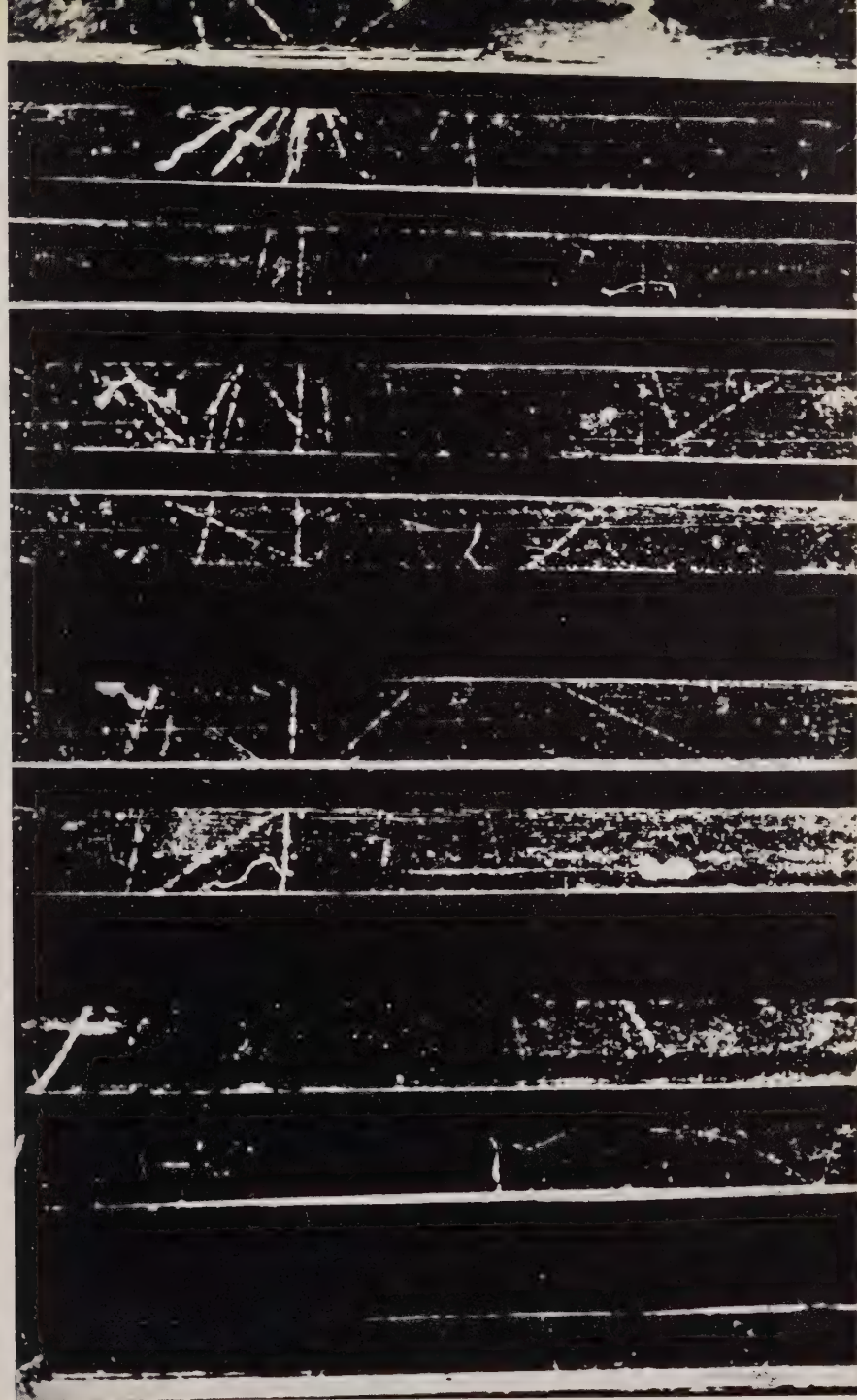


Fig. 4. - A penetrating particle interacts in a C plate. A relativistic particle, which is probably a π -meson, is emitted upwards. This may be interpreted as an ordinary scattering of a π -meson.

We assume that the interaction of the pions of 200-1000 MeV against nuclei mainly consists in a series of elastic pion-nucleus collisions, which goes on until the meson either emerges, or is captured after sufficient slowing down in some kind of many body process. This representation of the pion-nucleus collision has been already used in the literature ⁽⁵⁾.

The results of ANDERSON and FERMI with pions of 100-200 MeV, seem to support the charge symmetry hypothesis: according to it we may assume:

$$(6) \quad \sigma_+^+(E) \cong \sigma_0^-(E) = \sigma_1;$$

$$(6a) \quad \sigma_0^+(E) \cong \sigma_+^-(E) = \sigma_2;$$

where the meaning of the symbols is the following:

- a) $\sigma_+^+(E)$ cross-section for scattering of positive pions of energy E by protons;
- b) $\sigma_0^-(E)$ cross-section for scattering of negative pions by neutrons;
- c) $\sigma_0^+(E)$ cross-section for scattering of positive pions by neutrons;
- d) $\sigma_+^-(E)$ cross-section for scattering of negative pions by protons.

b) The same experiments indicate that the processes c), d) mainly are charge exchanges, so that the positive or negative pion emerges as a neutral pion. For the process indicated in d) the ratio of the probability for charge exchange to that for ordinary scattering is about 2:1 ^(3,4). We will assume, in agreement with the charge symmetry hypothesis, the same ratio for process c).

According to these hypothesis, the average probability P_1 that one charged pion against one nucleon of a nucleus (with about as many protons as neutrons) be scattered without charge exchange may be assumed to be:

$$(7) \quad P_1 = \frac{\sigma_1 + (1/3) \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

and the probability P_2 of charge exchange scattering is in the same approximation:

$$(7a) \quad P_2 = \frac{(2/3) \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}; \quad P_1 + P_2 = 1 \quad \text{if we disregard all other processes.}$$

⁽¹⁷⁾ The probability of emission of more than one neutral pion in one event is probably low. LOCK and YEKUTIELI ⁽⁵⁾ have only one case out of 16 where more than one charged pion was emitted in one nuclear event.

In this last collision the charged pion will be transformed in a neutral pion. The neutral pions in turn may undergo ordinary or charge exchange scattering against successive nucleons of the nucleus. Let us call ϑ_0 and ϑ_c the probability that a neutral pion colliding with a nucleon emerges as a neutral or as a charged pion respectively ($\vartheta_0 + \vartheta_c = 1$).

We find that after N elastic collisions with the nuclei of a nucleus the probability $P_1^{(N)}$ for a pion to be charged (positive or negative) is:

$$(8) \quad P_1^{(N)} = P_1 - (1 - P_1) \sum_{n=1}^{N-1} (P_1 - \vartheta_c)^n,$$

and the probability to emerge as a neutral meson after N elastic collisions will be:

$$(8_a) \quad P_2^{(N)} = 1 - P_1^{(N)}.$$

These probabilities $P_1^{(N)}, P_2^{(N)}$ may be expressed as in (8), (8_a) and may be easily calculated using (7), (7_a) if we assume that P_1, P_2 are independent from the energy, which is probably not true.

Let us estimate the probabilities $P_1^{(N)}, P_2^{(N)}$ on basis of the existing experimental data.

For energies around 200 MeV of the impinging pion σ_1 is definitely higher than σ_2 , and, as we already said, it results to be $\sigma_1 \cong 2\sigma_2$ ^(3,4).

c) By assuming this value of 2 for the ratio σ_1/σ_2 we have, substituting in (7), (7_a):

$$(9) \quad P_1 = \frac{2 + 1/3}{3} = \frac{7}{9}; \quad P_2 = \frac{2}{9}.$$

The collisions we want to discuss are those we observed in our Cloud Chamber. In this case, the number of the elastic collisions of the interacting pions inside the nucleus of Carbon or Lead before it emerges again or is captured may be assumed to vary between 1 and 3 ⁽⁵⁾, and these are therefore the reasonable values for N in (8), (8_a), (9). This value for N was estimated in the experiments with nuclear plates ⁽⁵⁾. The values of $P_1^{(N)}, P_2^{(N)}$ do not depend critically on the values of ϑ_0, ϑ_c . We lack of experimental information on the value of ϑ , so we will assume $\vartheta_0 = \vartheta_c = 1/2$, which is not in contradiction with the charge symmetry hypothesis.

Thus, applying (8), (8_a), (9) we have for the probabilities $P_1^{(N)}, P_2^{(N)}$, the numerical values given in Table III, row 1: as we see, $P_1^{(N)}$ is rather higher than $P_2^{(N)}$, which means that the probability of charge exchange is rather low.

In this estimate we assumed for the ratio σ_1/σ_2 the value $\sigma_1/\sigma_2 = 2$; this is true for pions of about 200 MeV (^{3,4}), but it is rather possible that this ratio approaches unity as the energy increases (⁷). Therefore it is interesting to give the values of P_1, P_2 for $\sigma_1/\sigma_2 = 1$; the values are given in table III, row 2; as we can see, the value P_2 in this case is somewhat higher.

TABLE III. — Value of the probability P_1, P_2 (see text) for a charged pion to emerge from the nucleus as a charged (P_1) or as a neutral (P_2) pion.

	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(2)}$	$P_1^{(3)}$	$P_2^{(1)}$	$P_2^{(2)}$	$P_2^{(4)}$
$\sigma_1/\sigma_2 = 2$.78	.72	.70	.22	.28	.30
$\sigma_1/\sigma_2 = 1$.67	.61	.60	.33	.39	.40

d) In conclusion, we see that within the assumptions of this paragraph the probability for charge exchange, P_2 , lays between .3 and .4:

$$(10) \quad P_2^{(1)} \cong P_2^{(2)} \cong P_2^{(3)} \cong \frac{1}{3}.$$

This value may be compared with our experimental value for the charge exchange cross-section. We found (cfr. (5)) that the probability of charge exchange (let us indicate it with P_2^{exp}) lays in the limits:

$$(11) \quad .16 \leq P_2^{\text{exp}} < .4.$$

The two values given in 10 and 11 are rather in agreement, especially if we consider that we did not take into account the probability for the pion being captured, which still may reduce the theoretical value of P_2 .

The value of LOCK and YEKUTIELI (⁴), is somewhat higher than all these values, but it is not too far if we consider the statistical errors.

e) *The capture probability.* According to current points of view, the capture of a pion by a nucleus has an appreciable probability only at rather low kinetic energies, for instance for pions below 50 MeV, corresponding to $\lambda = h/p > 10^{-12}$ cm.

The capture will therefore have a probability in the pion-nucleus collisions we considered (§ 3, incident pions with a kinetic energy between 200 and 1000 MeV) if the pion can be sufficiently slowed down in the successive collisions.

Following the picture we already gave (§ 6), we estimated the rate of the energy loss of the pion in successive elastic collisions, in the following way.

Let us indicate by $d\sigma/d\omega$ the differential angular cross-section (ω measures the solid angle) in the pion-nucleon collision. The energy ΔW which is lost by the pion in one pion-nucleon collision is univocally related to the angle of scattering ϑ , and the average energy $\overline{\Delta W}$ loss will be given by the integral:

$$(12) \quad \overline{\Delta W} = \int \Delta W \frac{d\sigma}{dw} dw \bigg/ \int \frac{d\sigma}{dw} dw,$$

$$(12a) \quad \Delta W = W - \frac{(W + M_0 c^2)(m_0^2 c^2 + M_0 W) + c^2 p^2 \cos \vartheta \sqrt{(M_0^2 - m_0^2 \sin^2 \vartheta)}}{(W/c + M_0 c)^2 - p^2 \cos^2 \vartheta},$$

where W , p , M_0 are the total energy, the momentum and the mass of the pion; M_0 is the mass of the nucleon; ϑ is the angle of scattering.

With the successive evaluation of this integral we may estimate step by step which is the residual energy of a pion which undergoes 1, 2, ..., N , successive elastic collisions against nucleons, and therefore, how many collisions are necessary to reach the region of energy when the pion has a good chance of being captured.

The function $d\sigma/d\omega$ begins only now to be known for pions in the 100-200 MeV region, again from the measurements of ANDERSON and COW (⁴). Their results indicate that $d\sigma/d\omega$ is not completely isotropic, owing to the large contribute of the back scattering: this means that the degradation in energy in the collisions is higher than in the case of complete isotropy.

We made some estimate of (12) using the expression:

$$(13) \quad \frac{d\sigma}{d\omega} = a + b \cos \vartheta + c \cos^2 \vartheta,$$

and substituting to a , b , c the constants of ANDERSON and FERMI (⁴), transformed to the laboratory system. The results are not too different from the case of complete isotropy ($b = c = 0$) and we did not insist in the calculations with definite values of a , b , c .

TABLE IV. — Average degradation of the kinetic energy of a pion of initial energy 700 MeV (total energy $W = 6 m_\pi c^2$).

(1)	(2)	(3)
Initial kinetic energy (MeV)	700	700
After 1 collision	180	350
After 2 collisions	76	205
After 3 collisions	38	135
After 4 collisions	—	94
Col. (2): energy after the successive collisions (as indicated in col. (1)) in the hypothesis that the energy transferred in each collision from the pion to the nucleon is the maximum transferable energy.		
* (3): average energy after the successive collisions in the hypothesis of complete isotropy.		

In table IV we give an example of the degradation in energy in the case that the energy transferred in each collision is the maximum (col. 2) and in the case of complete isotropy (col. 3).

The results indicate that for pions of our energies (for instances between 700 and 180 MeV, which are the first two values of col. 2) the maximum degradation may be fast enough for bringing the pion in the region of energy when the capture becomes likely. In case that $d\sigma/dw$ is isotropic the degradation appears too low and as a consequence the scattering should remain the predominant process in the pion-nucleus collision.

Conclusions.

We have studied the nuclear properties of the charged π -mesons of high energy (kinetic energy between 200-1000 MeV), by observing the interactions in Carbon and Lead of the fast secondary particles (shower particles) emitted in cosmic ray nuclear events. The conclusions may be summarized as follows:

— The total cross section σ_c of the pions in Carbon was measured by comparison with Lead. We found $\sigma_c = 247 \pm 60$ millibarns.

— This result agrees with those of other experiments with light nuclei. The general indication is that the cross-section for pions of our energies is somewhat lower than the geometrical.

— We examined those s.n.i. in which electromagnetic component is emitted. The conclusion is that the average number \bar{n} of neutral mesons emitted per s.n.i. is $\bar{n} = .31 \pm .1$. LOCK and YEKUTIELI⁽⁵⁾ found $\bar{n} = .6 \pm .2$. The cross-section σ_{ch} for charge exchange is probably in the limits $.16\sigma_{total} \leq \sigma_{ch} \leq (.31 + .1)\sigma_{total}$.

— In an attempt to interpret our results we estimated the values of $\sigma_{ch}/\sigma_{total}$, using the results of ANDERSON, FERMI, NAGLE and YODH^(3,4) with pions of 100-200 MeV. The resulting value $\sigma_{ch}/\sigma_{total} \cong 1/3$ is not in disagreement with our one. The numerous hypothesis used for our estimate are given in § 6.

The experimental part of this work was made in Colorado when the author was there from Princeton University.

The author is deeply indebted to Prof. G. T. REYNOLDS for discussions and encouragement during the experimental work, and to Mr. Y. B. KIM for his continuous help.

The author wishes to thank Professors P. CALDIROLA and G. TAGLIAFERRI for valuable conversations.

RIASSUNTO

Si studiano le interazioni nucleari prodotte in Carbonio e Piombo dai secondari ionizzanti emessi in precedenti interazioni nucleari. Queste ultime interazioni sono avvenute in uno strato di materiale disposto sopra una camera di Wilson, o in cristalli di ioduro di sodio posti entro la camera. Le misure sono state eseguite a 3200 m. La discussione dei risultati porta alla conclusione che circa il 75% dei secondari ionizzanti sono mesoni π , ed il resto essenzialmente protoni; quindi dai nostri risultati è possibile ricavare dati sulle interazioni dei mesoni π di energia tra 200 e 1000 MeV. Diamo in sintesi le conclusioni raggiunte: 1) La sezione d'urto totale σ_c dei mesoni in Carbonio risulta $\sigma_c = 247 \pm 60 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$. Questo risultato si accorda con altri precedenti di altri autori, in particolare con quelli statisticamente più ampi ottenuti da COOK e PICCIONI con contatori di Geiger ($270 \pm 25 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$). 2) Dall'esame di quelle interazioni nucleari secondarie nelle quali è emessa componente elettromagnetica (presumibilmente risultante dalla disintegrazione di mesoni π neutri) si conclude che il numero medio \bar{n} di mesoni neutri emessi per interazione nucleare dei mesoni π veloci è $\bar{n} = .31 \pm .1$. LOCK e YEKUTIELI hanno trovato, in lastre nucleari, $\bar{n} = .6 \pm .2$. La sezione d'urto σ_{ch} per scambi di carica è entro i limiti $.16\sigma_{totale} \leq \sigma_{ch} \leq (.31 + .1)\sigma_{totale}$. 3) In un tentativo di interpretare i nostri risultati noi abbiamo stimato il valore prevedibile della quantità $\sigma_{ch}/\sigma_{totale}$, se si impiegano i risultati ottenuti da ANDERSON, FERMI, NAGLE e YODH con mesoni di 100-200 MeV contro idrogeno. Il valore risultante $\sigma_{ch}/\sigma_{totale} \cong 1/3$ non è in disaccordo col nostro risultato sperimentale. Le numerose ipotesi usate per la nostra stima sono date in § 6.

Determinazione delle curve di sensibilità ai raggi γ di emulsioni fotografiche.

L. ARGIERO

Accademia Navale - Livorno

(ricevuto l'8 Giugno 1953)

Riassunto. — Vengono calcolate le curve di sensibilità alle radiazioni γ di quattordici tipi di emulsioni fotografiche Ferrania con i rispettivi errori relativi medi. Inoltre per ogni tipo di emulsione viene stabilito l'intervallo di sensibilità utile per la dosimetria protettiva del personale dei laboratori radioattivi scientifici, terapeutici ed industriali.

L'impiego delle emulsioni fotografiche per la rivelazione e la dosimetria individuale delle radiazioni delle sostanze radioattive e dei raggi X, presenta, accanto agli evidenti vantaggi di semplicità di impiego e di economia, gli svantaggi dovuti alla imprecisione delle determinazioni che con questo mezzo si possono effettuare.

Gli studi in questo senso di SMITH sulla misura di radioattività α con dental films ⁽¹⁾, quelli di BAKER e SILVERMAN sui films per la protezione personale ⁽²⁾, di EHRLICH e FITCH sulla dosimetria fotografica per raggi X e γ ⁽³⁾, quelli di RUDENBERGER, COWING e SPALDING sulla misura di $^{32}_{15}\text{P}$ e $^{131}_{53}\text{I}$ con dental films ⁽⁴⁾, ed infine quelli di PARDUE, GOLDSTEIN e WOLLAN sull'impiego delle pellicole come dosimetri tascabili ⁽⁵⁾, per non ricordare che i maggiori, hanno portato alla selezione di particolari tipi di emulsione ed alla standardizzazione della tecnica di sviluppo in modo tale che la imprecisione delle determinazioni possa essere contenuta in limiti ragionevoli e praticamente accettabili.

⁽¹⁾ C. C. SMITH: *Nucleonics*, 5, no. 3, 72 (1949).

⁽²⁾ R. BAKER e L. B. SILVERMAN: *Nucleonics*, 7, n. 1, 26 (1950).

⁽³⁾ M. EHRLICH e S. H. FITCH: *Nucleonics*, 9, n. 3, 5 (1951).

⁽⁴⁾ F. H. RUDENBERGER, R. F. COWING e C. K. SPALDING: *Nucleonics*, 3, n. 6, 52 (1948).

⁽⁵⁾ L. A. PARDUE, N. GOLDSTEIN e E. O. WOLLAN: *MDDC* 1065.

Abbiamo ritenuto interessante affrontare radicalmente il problema, utilizzando quanto ci può offrire il mercato nazionale, dato l'intensificarsi dell'impiego dei radio-isotopi sia per usi scientifici che per usi terapeutici ed industriali ed il continuo aumento delle potenze delle installazioni dei raggi X.

Come è noto l'annerimento di un film dipende dal tipo di emulsione adoperata, dal tipo di radiazione incidente sul film e dalla sua quantità, dal tipo, temperatura e tempo di sviluppo.

Se tutti questi fattori rimangono costanti, tranne il tipo e la quantità di radiazione, è possibile determinare la dose ricevuta dal film paragonando il suo annerimento con quello di esposizioni note.

Comunemente l'annerimento « D » viene definito come il logaritmo negativo del rapporto delle intensità fra il flusso luminoso « I » trasmesso attraverso un film esposto, rispetto a quello trasmesso « I_0 » attraverso un film non esposto, cioè in simboli:

$$D = -\lg \frac{I}{I_0} = \lg \frac{I_0}{I}.$$

D'altra parte è anche noto che l'annerimento è proporzionale al logaritmo della esposizione « E » che nel nostro caso è la dose di radioattività ricevuta dalla pellicola e quindi per i raggi X e γ , proporzionale al logaritmo dei roentgen, in simboli:

$$D = K \lg r, \quad \lg \frac{I_0}{I} = K \lg r.$$

Le esperienze fatte hanno portato come risultato che per ogni tipo di pellicola si può determinare una curva caratteristica, la quale, in un diagramma semplicemente logaritmico, avente sulle ordinate la densità di annerimento « D » e sulle ascisse i logaritmi delle esposizioni, presenta un tratto iniziale curvo, seguito da un tratto pressochè rettilineo ed infine un ginocchio, non sempre facilmente determinabile, che rappresenta la condizione di saturazione fotochimica della emulsione stessa.

Nel tratto rettilineo della caratteristica la pellicola può essere impiegata come dosimetro, ne consegue che per ogni tipo di emulsione può essere determinato un intervallo di sensibilità utile da cui discende la possibilità di impiego pratico della pellicola stessa.

Gli studi eseguiti portano alla conclusione che ogni tipo di pellicola ha un intervallo di sensibilità non troppo elevato che si aggira approssimativamente intorno ad una decade di valori della esposizione.

Per quanto riguarda la dosimetria in raggi γ va osservato che la sensibilità delle pellicole rimane praticamente costante per un vasto intervallo di energia superiore a 0,2 MeV.

La pellicola non impressionata da confrontare con quella impressionata presenta sempre essa pure un certo annerimento base (fog), che dipende in

maniera complessa dal tipo di emulsione, dal tempo e dalla temperatura di sviluppo e dallo stato di conservazione del film.

Non è stata trovata alcuna ditta italiana che producesse dental films col preciso scopo della dosimetria individuale, e ci siamo pertanto proposti di esaminare i tipi di emulsione che comunemente vengono impiegati per le radiografie e con cui la ditta Ferrania ci ha confezionato tredici diversi tipi di dental films, oltre al cartoncino Vega.

Per il nostro studio è stata adoperata una sorgente standard di radio da 100 mg di radio elemento ed una sorgente di $^{60}_{27}\text{Co}$ da 100 millicurie con esposizioni a distanze opportunamente variate in modo da coprire per ogni tipo di pellicola un intervallo da 0 a 600 roentgen. Dopo alcuni tentativi è stata trovata una condizione favorevole di temperatura, tempo e tipo di sviluppo che poi è stata mantenuta per quanto possibile costante durante tutte le prove, onde limitare le incertezze dovute a queste cause.

Come detto, il nostro scopo era quello di determinare per i vari tipi di emulsione presi in esame, le curve caratteristiche ed il conseguente intervallo di sensibilità utile.

Le misure di annerimento sono state effettuate adoperando una sorgente luminosa stabilizzata da 500 W montata su un banco fotometrico, dotato di cellula fotoelettrica Weston 594 RR collegata con un sensibile galvanometro ($3 \cdot 10^{-9}$ A) sfruttando le condizioni di massima sensibilità del complesso, ed ovviando alla non linearità degli strumenti.

I tipi di emulsione adoperati sono stati i seguenti: Simplex, RN, D2, SAV n. 2, D3, BS, Recta, BS grana fina, X3V, Pancro C7, Portrait pancro, Fotomeccanica normale, Controtipo Pancro grana fina, Cartoncino Vega normale.

TABELLA I.

Tipo di emulsione	Intervallo di sensibilità utile in roentgen
Simplex	1 - 3
RN	1 - 15
X 3 V	1 - 15
D 2	3 - 5,5
SAV n. 2	10 - 50
D 3	10 - 70
BS	30 - 150
Portrait Pancro	10 - 200
Recta	40 - 200
BS grana fina	50 - 200
Pancro G 7	20 - 400
Fotomeccanica normale	40 - 400
Controtipo pancro grana fina	40 - 400
Cartoncino Vega	30 - 500

Nella tabella I è riportato, per ogni tipo di emulsione, l'intervallo di sensibilità utile, cioè il valore del tratto rettilineo della corrispondente curva caratteristica, nel quale si ritiene possibile eseguire delle misure dosimetriche, senza eccessivi errori.

Le conclusioni che possiamo trarre da questo studio sono le seguenti: non tutte le emulsioni hanno lo stesso intervallo di sensibilità per i raggi γ da noi usati e tale intervallo non è per tutte egualmente esteso sulla scala logaritmica.

Tali intervalli si sovrappongono per coprire un intervallo totale che va da circa 1 a circa 500 roentgen come da tabella I.

Mentre nessuna di queste emulsioni può essere adoperata in pratica per le normali esigenze di un laboratorio radioattivo, quale dosimetro individuale, in cui non si deve superare la dose di 0,3 roentgen la settimana, stante l'alta dose richiesta per l'impiego anche della pellicola più sensibile, alcune di esse si presterebbero bene alle misure di alte e altissime dosi, che possono riuscire registrabili in radiometallografia ed in altri casi speciali.

Ci proponiamo pertanto di estendere queste ricerche ad altri tipi di pellicola ed eventualmente ricavare le caratteristiche di composizione di una emulsione adatta alle basse dosi.

È stato anche eseguito un controllo dell'annerimento in funzione dell'energia dei raggi γ .

Le due sorgenti radioattive impiegate sono state tarate in energie ed in numero di fotoni γ . La concordanza dei risultati ottenuti con esse conferma quanto già rilevato, e cioè che, per energie superiori a 0,2 MeV, l'annerimento risulta indipendente dall'energia stessa.

L'esperienza ci ha portato a concludere che gli errori di misura di annerimento, ferme restando le condizioni di sviluppo, dipendono in maniera essenziale da una disuniformità nella struttura delle emulsioni, assai variabile da tipo a tipo.

Questi errori vanno da un minimo del 0,2 % nei casi più favorevoli (tipo BS grana fina) ad un massimo corrente che si aggira sui 10-13 %, il che, data la pendenza delle curve, comporta per tutti i tipi di pellicola un errore nel computo della dose perfettamente accettabile in pratica.

Per il cartoncino Vega gli errori sono maggiori.

Sono stati calcolati gli errori relativi medi per le pellicole non esposte alle radiazioni γ e per quelle esposte alle radiazioni.

I risultati sono riportati in tabella II.

Per la determinazione della sensibilità delle emulsioni ai β sono state effettuate esperienze con sorgenti β costituite da nitrato di uranile e da ossido di torio, esponendo le pellicole con schermi di spessori di piombo crescente da 100 a 600 μ onde determinare la differenza di annerimento fra β e γ presenti.

Dato infatti che l'assorbimento è, nel nostro caso, di natura esponenziale per i γ (e praticamente trascurabile per gli spessori usati), e quello dei β di-

TABELLA II.

Tipo di emulsione	Errore relativo medio nell'annerimento base	Errore relativo medio nell'annerimento
Simplex	0,114	0,075
RN	0,114	0,132
D2	0,087	0,027
SAV	0,083	0,101
D3	0,036	0,094
BS	0,051	0,036
Recta	0,123	0,085
BS grana fina	0,002	0,016
X3V	0,094	0,125
Panero C7	0,008	0,052
Portrait panero	0,006	0,013
Fotomeccanica normale	0,004	0,007
Controtipo panero grana fina	0,005	0,004
Cartoncino Vega normale	0,009	0,150

pende in maniera più complessa dallo spessore, potrebbe attendersi una certa differenziazione fra pellicola nuda e schermata.

In effetti tale differenza è stata notata ma non è stato possibile, anche con esposizioni assai prolungate, determinare con i tipi di emulsione adoperati, differenze sicuramente misurabili fra pellicole schermate con vari spessori.

Il che ci porta, per ora a concludere che la differenziazione fra β e γ mediante le attuali pellicole è possibile solo se i β sono in presenza di γ assai poco intensi e che comunque la sensibilità delle emulsioni studiate non è la più adatta per la dosimetria dei raggi β .

Ringrazio il prof. TITO FRANZINI per i preziosi consigli ed il dott. G. SALARDI per la sua collaborazione.

SUMMARY

Sensibilities to γ radiation of fourteen types of « Ferrania » photographic emulsion have been measured with their relative error. For every type the range of sensibility to be used for protective dosimetry for scientific, biological and industrial necessities has been determined.

Has the Isotopic Spin any Sense for Light Particles?

M. CINI and A. GAMBA

Istituto di Fisica dell'Università - Torino

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Torino.

(ricevuto il 9 Giugno 1953)

Summary. — The possibility of extending the concept of isotopic spin to muons, electrons and neutrinos produced in the pion decay, muon decay, β -decay and nuclear capture of the muon is investigated. If these reactions are charge independent it follows that the isotopic spin $1/2$ must be assigned to all fermions. Furthermore the β -decay neutrino must be different from the pion decay neutrino, which has to be properly denoted as neutretto. Some reactions by means of which the hypothesis of charge independence could be tested are proposed, but they are all far beyond the present experimental possibilities.

1. — It has been extremely useful to separate the properties which are shared by both neutron and proton from those which are peculiar to each of them, such as mass, charge and magnetic moment. For this purpose the concept of isotopic spin has been introduced, by means of which proton and neutron appear as different states of the same particle (the nucleon) belonging to different components t_z of the same total isotopic spin $t = 1/2$. In a system of nucleons the first kind of properties leave the total isotopic spin a constant of the motion, since the proton and the neutron are treated on equal footing. On the contrary the influence of the second ones differs according to the particular component t_z selected, so that the wave function becomes a mixture of pure eigenstates of the total isotopic spin. The common properties will be denoted in what follows as isotopic-independent, which seems a better term than charge independent, and the others as isotopic dependent.

Since the isotopic spin formalism has been recently successfully extended

to treat systems of nucleons and pions ⁽¹⁾, one can ask whether it may be useful to extend the use of it to other systems of elementary particles.

It may seem questionable to use the concept of isotopic spin when the isotopic dependent interactions are not negligible in comparison with the other ones. That this is not the case can be better understood by considering a simple example.

The Li^6 nucleus has almost certainly an excited state with total isotopic spin $T = 1$ and $T_z = 0$ ⁽²⁾. Neglecting the differences between neutron and proton (isotopic dependent forces) one would expect also the existence of a corresponding level $T = 1$, $T_z = 1$ (Be^6) with the same energy, which actually does not exist. The reason is that the Coulomb forces, which act differently on the different T_z components, give rise to an additional energy, which is enough to disrupt the Be^6 nucleus. This shows that the effect of isotopic dependent forces may well be neglected for some components of the same total isotopic spin, although not for all of them.


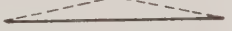
In nuclear physics there is no need of considering the isotopic spin of anti-particles, but if an isotopic spin has to be assigned to other fermions, such as the electron or the muon, this problem arises.

With the convention of identifying the $t_z = 1/2$ eigenstate with the proton P, it can be shown that the antiproton \bar{P} must belong to $t_z = -1/2$ ⁽³⁾. This assignments follows immediately considering the reaction

$$\pi^0 \rightarrow P + \bar{P}$$

(which is a direct consequence of our assumption that an antiproton \bar{P} exists) bearing in mind that π^0 has $t_z = 0$. Similarly the neutron N must be given $t_z = -1/2$, and the antineutron \bar{N} $t_z = 1/2$. One notices that two nucleons exist with $t_z = 1/2$ (P and \bar{N}) and two with $t_z = -1/2$ (N and \bar{P}), but rotations in isotopic spin space connect only \bar{P} with N and \bar{N} with P respectively, whereas charge-conjugation connects only P with \bar{P} and N with \bar{N} . This relation is clearly shown in the following table:

TABLE I.

	$t_z = 1/2$		$t_z = -1/2$
particles	P		N
antiparticles	\bar{N}		\bar{P}

⁽¹⁾ K. M. WATSON and K. K. BRUECKNER: *Phys. Rev.*, **83**, 1 (1951); K. M. WATSON: *Phys. Rev.*, **85**, 852 (1952).

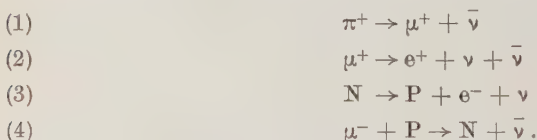
⁽²⁾ F. AJZENBERG and T. LAURITSEN: *Rev. Mod. Phys.*, **24**, 321 (1952). We are indebted to prof. L. A. RADICATI for pointing out to us this example.

⁽³⁾ L. MICHEL: *Nuovo Cimento*, **10**, 319 (1953).

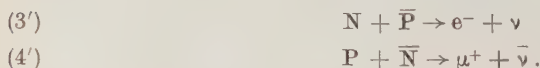
The heavy lines connect the states obtained from each other by rotation in isotopic space, while the dotted lines connect charge conjugate states.

From this follows that if a fermion, let us say a positive electron e^+ , is given a total isotopic spin $t = 1/2$ with $t_z = 1/2$, a rotation in isotopic spin space cannot transform the e^+ state in an e^- state, which can only be obtained by means of a charge conjugation. We will have thus another state of the same particle, which must be different from both e^+ and e^- . The corresponding rotation on the e^- state will give a fourth state, in strict analogy with the nucleon's case.

2. - We will take into account only the following well established reactions:



It will be useful to write (3), (4) in the form:



If also in these reactions neutron and proton behave identically, apart from isotopic dependent properties (charge, mass, magnetic moment), and the same is true for the different pions, this means that under rotation in isotopic spin space the wave function of the systems $(\mu^+ + \bar{\nu})$, $(e^- + \nu)$ transforms like Y_1^1 and Y_1^{-1} respectively, since the total isotopic spin in reaction (1), (3') and (4') must be a constant of the motion. We will show that this leads to a unique assignement of an isotopic spin to each of the particles involved.

Developing the isotopic spin part of the muon and neutrino wave function in spherical harmonics, the reaction (1) can be written

$$\begin{aligned}
 (5) \quad Y_1^1 &= \sum_{jj'} \sum_{m=-j}^j A_{jj'} C_{jj'}(1, 1; m, 1-m) Y_j^m(\mu) \mathcal{Y}_{j'}^{1-m}(\nu) = \\
 &= A_{10} Y_1^1(\mu) \mathcal{Y}_0^0(\nu) + A_{01} Y_0^0(\mu) \mathcal{Y}_1^1(\nu) + \frac{A_{11}}{\sqrt{2}} (Y_1^1(\mu) \mathcal{Y}_1^0(\nu) - Y_1^0(\mu) \mathcal{Y}_1^1(\nu)) + \dots \\
 &\dots + A_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} Y_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\mu) \mathcal{Y}_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\nu) + A_{\frac{1}{2} \frac{3}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} Y_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\mu) \mathcal{Y}_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}(\nu) + \frac{1}{2} Y_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(\mu) \mathcal{Y}_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}(\nu) \right) + \\
 &+ A_{\frac{3}{2} \frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} Y_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}(\mu) \mathcal{Y}_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\nu) + \frac{1}{2} Y_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}(\mu) \mathcal{Y}_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(\nu) \right) + \dots
 \end{aligned}$$

where $C_{jj'}(1, 1; m, 1-m)$ are the Clebsch-Gordan coefficients and $A_{jj'}$ normalization constants. We have indicated with $Y_j^m(\mu)$ the simultaneous eigenstate of the total isotopic spin j and of the z -component m for the μ^+ , and similarly $\mathcal{Q}_{j'}^m(\nu)$ for the $\bar{\nu}$. We have introduced the two types Y and \mathcal{Q} in order to stress that they are spherical harmonics in two different spaces, one of the particles and the other of the antiparticles.

Since the isotopic spin wave function of the μ^+ must be an eigenstate of the charge, it follows that in the development (5) only one value of m for a given j can appear, because different values of m for the same j belong to different states of charge. For this reason all the $A_{jj'}$ in (5) must be zero except A_{10} , A_{01} , $A_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Let us now consider the reaction

$$(6) \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \nu.$$

Since the left hand side can be obtained from the l.h.s. of (1) by means of a rotation in isotopic space, the same must be true for the r.h.s. But the r.h.s. can also be obtained from the r.h.s. of (1) by means of a charge conjugation. The two operations coincide only if the μ^+ wave function transforms under rotation in isotopic space in the ν wave function, and conversely the $\bar{\nu}$ in the μ^- . This can be seen clearly by writing the wave function of the system ($\mu^+ + \bar{\nu}$) in the state in which these particles are produced by the pion decay

$$(7) \quad \Psi = A_{10} Y_1^1(\mu) \mathcal{Q}_0^0(\nu) + A_{01} Y_0^0(\mu) \mathcal{Q}_1^1(\nu) + A_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} Y_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\mu) \mathcal{Q}_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\nu).$$

In a suitable representation the charge conjugate state Ψ' of Ψ is

$$(8) \quad \Psi' = A_{10}^* Y_1^{-1}(\mu) Y_0^0(\nu) + A_{01}^* \mathcal{Q}_0^0(\mu) Y_1^{-1}(\nu) + A_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^* \mathcal{Q}_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(\mu) Y_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(\nu),$$

bearing in mind that, for the reasons stated in section 1, the charge conjugation exchanges the isotopic spaces of particles and antiparticles. The same state must also be obtained with a rotation of (5) in isotopic space

$$(9) \quad \Psi' = A_{10} Y_1^{-1}(a) \mathcal{Q}_0^0(b) + A_{01} Y_0^0(a) \mathcal{Q}_1^{-1}(b) + A_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} Y_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(a) \mathcal{Q}_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(b),$$

where a and b are the particles obtained from μ^+ and $\bar{\nu}$ respectively by rotation in isotopic space. In order that (8) and (9) coincide we must have $b = \mu^-$ and $a = \nu$. Now, since \mathcal{Q}_0^0 is an invariant for rotations in isotopic space, it cannot describe at the same time a neutrino in (7) and a charged muon in (9), and the same is true for Y_0^0 . Therefore A_{10} and A_{01} must both vanish.

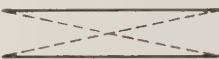
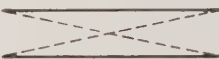
This assigns unambiguously the total isotopic spin $1/2$ to both the muon and the neutrino, which turn out to be different states of the same particle.

The apparently arbitrary assumption of an antineutrino $\bar{\nu}$ in the r.h.s. of (1) is therefore justified by our results. It may be worth while to note that the argument used above to rule out the possibility of a mixture of isotopic spin eigenstates for the muon and the neutrino wave function, cannot obviously be used in order to assign a definite isotopic spin to the photon from the apparently similar reaction

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma.$$

The preceding results justify a modification of nomenclature in which the neutrino ν emitted in the reaction (6) will be called neutretto and denoted as μ_0 . The different states of the muon can be classified according to the following table in strict analogy with the nucleon case:

TABLE II.

	$t_z = 1/2$		$t_z = -1/2$
particles	μ^+		μ_0
antiparticles	$\bar{\mu}_0$		μ^-

From this follows immediately that the π^0 could also decay according to the following reactions

$$(10) \quad \pi^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-,$$

$$(11) \quad \pi^0 \rightarrow \mu_0^+ + \bar{\mu}_0.$$

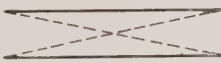
The former is strictly forbidden by energy conservation, because the mass difference between charged and neutral muons (isotopic dependent property) is not irrelevant (see the similar discussion for Li^6 and Be^6 nuclei in section 1). The latter competes unfavorably with the γ -decay, so that no contradiction with experiment arises.

A similar analysis of the remaining reactions leads to a unique assignment for the total isotopic spin of the positive electron e^+ ($t_z = 1/2$, $t = 1/2$) and to the existence of another state of this particle with no charge ($t_z = -1/2$, $t = 1/2$) identified with the β -decay neutrino (reaction (3)) which turns out to be different from the neutretto μ_0 .

In complete analogy with the preceding tables I and II, we can summarize

these results in the following table III:

TABLE III.

	$t_z = 1/2$		$t_z = -1/2$
particles	e^+		ν
antiparticles	$\bar{\nu}$		e^-

One notices that the assumption of isotopic independence of reaction (1)-(4) leads uniquely to assign isotopic spin $1/2$ to all fermions.

The neutral particles appearing in (2) and (4) could be in principle identified either with the neutrino ν or with the neutretto μ_0 in all possible combinations. It turns out that the only forms which do not lead to contradiction with experiment are the following ones:

$$\begin{aligned}
 (1a) \quad & \pi^+ \rightarrow \mu^+ + \bar{\mu}_0 \\
 (2a) \quad & \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu + \bar{\mu}_0 \\
 (2b) \quad & \mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu} + \mu_0 \\
 (2c) \quad & \mu^+ \rightarrow e^+ + \mu_0 + \bar{\mu}_0 \\
 (3a) \quad & N \rightarrow P + e^- + \nu \\
 (4a) \quad & \mu^- + P \rightarrow N + \mu_0.
 \end{aligned}$$

As an example of inconsistency arrived at with other forms, we discuss the possibility:

$$(12) \quad N \rightarrow P + e^- + \mu_0.$$

This may look attractive also for the reason that a rotation in isotopic space would lead to the process:

$$(13) \quad \mu^- + P \rightarrow N + \bar{\nu},$$

which is the nuclear capture of the muon (4). This would seem a way of explaining the identity of the coupling constants for the two processes, as they would be different forms of the same process. However this is not pos-

sible because in addition to (12) and (13) one would have

$$(14) \quad \mu^- + P \rightarrow P + e^-$$

which is not observed.

The only possible way of testing the validity of the isotopic independence of reactions (1)-(4) is to study experimentally scattering processes such as:

$$(2a') \quad \mu^+ + e^- \rightarrow e^+ + \mu^-$$

$$(2b') \quad \mu^+ + \mu^- \rightarrow e^+ + e^-$$

$$(2c') \quad \mu^+ + \mu^- \rightarrow e^+ + \mu^-.$$

obtained by means of a rotation in isotopic space from (2a), (2b) and (2c) respectively. They are all far beyond the present experimental possibilities.

In conclusion the hypothesis of isotopic independence leads to a unique assignment for the total isotopic spin of all known fermions, as well as to the existence of two different kinds of neutral particles of vanishingly small rest mass, which are not simply particle and antiparticle.

If someone feels that such an increase in the number of unobservable neutral particles is too much for his physical taste, our point is that he must then necessarily admit that a difference between proton and neutron exists, which cannot be traced back to the well known differences of charge, mass and magnetic moment. Unfortunately it does not seem possible at present to choose between these two alternatives.

The authors are indebted to Prof. R. E. PEIERLS, Dr. H. R. DALITZ and Prof. L. A. RADICATI for very helpful discussions and suggestions concerning the final form of the manuscript.

RIASSUNTO

Si studia la possibilità di estendere il concetto di spin isotopico ai mesoni μ , agli elettroni e ai neutrini prodotti nel decadimento del π e del μ , nella disintegrazione β e nella cattura nucleare del μ . Se si ammette che queste reazioni siano « charge independent » segue che la sola assegnazione possibile per lo spin isotopico è $1/2$ per tutti i fermioni. Inoltre si fa vedere che il neutrino della disintegrazione β dev'essere diverso da quello prodotto nel decadimento del π e nella cattura nucleare del μ , che dovrebbe essere più correttamente denotato come neutretto. Si scrivono alcune reazioni per mezzo delle quali si dovrebbe poter verificare l'ipotesi della « charge independence », ma nessuna risulta alla portata delle attuali possibilità sperimentali.

Tracce di rinculo nelle stelle di disintegrazione nucleare prodotte dalla radiazione cosmica.

M. GRILLI e B. VITALE

Istituto di Fisica dell'Università - Padova
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova

(ricevuto il 9 Giugno 1953)

Riassunto. — Sono state studiate le distribuzioni in lunghezza ed angolari dei rinculi in stelle di bassa e media energia ($< 1\,000$ MeV) e le loro relazioni angolari con i rami delle stelle. Nella ipotesi che la traccia di rinculo sia dovuta al nucleo residuo della disintegrazione, messo in moto dagli impulsi cedutigli durante l'emissione diretta e la successiva evaporazione, e specializzate in modo più dettagliato le modalità di cessione dell'impulso durante l'emissione diretta, è stata fatta una analisi statistica, con un Montecarlo, della formazione di un rinculo visibile in una stella di disintegrazione nucleare, delle condizioni che lo determinano e dei fenomeni che lo accompagnano. L'accordo tra i risultati del Montecarlo e i dati sperimentali è risultato soddisfacente: alcune discordanze sono eventualmente spiegabili, oltre che con le ipotesi e le approssimazioni utilizzate nel Montecarlo, con l'intervento di fenomeni di evaporazione locale. Il modello proposto comporta, nelle stelle con rinculo visibile, la coesistenza di particolari fluttuazioni nell'andamento della cascata nucleonica e della evaporazione: queste fluttuazioni determinano, con la formazione di un rinculo visibile, altre caratteristiche nelle stelle, anch'esse confermate dai dati sperimentali.

Introduzione.

Le stelle di disintegrazione nucleare osservate nelle emulsioni nucleari ed in Camera di Wilson presentano spesso, oltre ai rami ionizzanti che vengono emessi dal nucleo durante i vari stadi della disintegrazione, uno e talvolta

più rami neri, molto corti ($\sim 10 \mu$) ed in genere più fortemente ionizzanti dei protoni a morte. La particella responsabile di queste caratteristiche tracce è stata sin dall'inizio identificata con il nucleo o i frammenti nucleari residui al termine dei processi di emissione diretta e di evaporazione. Queste tracce sono state quindi chiamate « tracce o nuclei di rinculo » o, più semplicemente, « rinculi ».

In questo lavoro abbiamo cercato di raccogliere alcuni utili dati sperimentali sui rinculi, sia analizzandone le caratteristiche, sia studiando le stelle in cui essi sono presenti; di precisare il meccanismo per il quale il nucleo acquista impulso durante l'emissione diretta e l'evaporazione; di trarre dal modello proposto, mediante una analisi statistica (Montecarlo), risultati confrontabili con i dati sperimentali; ed, infine, di discutere mediante questo confronto la validità del modello proposto e la sua adeguatezza alla descrizione del fenomeno studiato.

Lo studio sperimentale dei rinculi è reso difficile dalla loro piccolezza, dalla facilità con la quale possono venire perduti per sovrapposizione con i rami fortemente ionizzanti delle stelle o confusi con elettroni lenti uscenti dal centro delle stelle o con particelle di decadimento. Inoltre la loro elevata carica elettrica determina frequenti diffusioni coulombiane (PERKINS ⁽¹⁾) che rendono incerte le misure di lunghezza; la loro piccolezza impedisce misure di inclinazione sul piano dell'emulsione e limita le osservazioni alle loro proiezioni; infine la stessa relazione percorso/energia per frammenti nucleari di bassa energia ed elevata carica e massa non è ancora definita con precisione.

La lunghezza massima della traccia in proiezione, al di sotto della quale essa è accettata come rinculo, varia nei vari autori: 5μ per HARDING *et al.* ⁽²⁾, 10μ per HARDING ⁽³⁾, 5μ per DELLA CORTE *et al.* ⁽⁴⁾, 4μ per SEED ⁽⁵⁾.

I dati sperimentali finora pubblicati possono essere divisi in due gruppi: a) analisi dei rinculi; b) analisi delle stelle con rinculo e confronto delle loro caratteristiche con quelle analoghe nelle stelle senza rinculo.

a) *Analisi dei rinculi.* — Il solo HARDING ⁽³⁾ ha finora pubblicato la distribuzione in lunghezza dei rinculi e la loro distribuzione angolare rispetto alla verticale, senza però dividere in gruppi le sue stelle, che presentavano da 2 a 19 rami ionizzanti. La distribuzione angolare è nettamente anisotropa, essendo i rinculi collimati in avanti rispetto alla verticale (quindi, approssimativamente, rispetto alla direzione dei primari).

⁽¹⁾ D. H. PERKINS: *Nature*, **161**, 486 (1948).

⁽²⁾ J. B. HARDING, S. LATTIMORE e D. H. PERKINS: *Proc. Roy. Soc.*, **193**, 325 (1949).

⁽³⁾ J. B. HARDING: *Phil. Mag.*, **40**, 530 (1949).

⁽⁴⁾ M. DELLA CORTE e M. GIOVANNOZZI: *Nuovo Cimento*, **8**, 741 (1951).

Qui e nel seguito, definiremo:

$$R = \frac{\text{rinculi in avanti}}{\text{rinculi indietro}} ;$$

HARDING ha: $R = 1,7$. I recenti dati di SEED ⁽⁵⁾ per stelle prodotte da protoni di 100 MeV, nei quali la distribuzione angolare dei rinculi è data rispetto al primario, portano ad un numero molto più alto: $R = 6,3$.

b) *Analisi delle stelle senza rinculo.* - Solo una parte delle stelle di disintegrazione nucleare presenta, come si è detto, un rinculo visibile; HARDING ⁽⁵⁾ dà le seguenti percentuali:

Stelle con 2- 5 rami ionizzanti: 34 % con rinculo
 » 6-19 » » : 58 % » »

Le stelle con rinculo visibile presentano alcune caratteristiche rispetto a quelle prive di esso: in particolare, la distribuzione angolare rispetto alla verticale dei rami neri N ($E \leq 30$ MeV), che è nella generalità delle stelle ancora nettamente anisotropa (vedi, per esempio, BERNARDINI *et al.* ⁽⁶⁾ per la distribuzione angolare rispetto al primario), tende all'isotropia nelle stelle con rinculo (MANFREDINI ⁽⁷⁾ per stelle a 3-5 rami; BELLIBONI *et al.* ⁽⁸⁾ per stelle a 8-12 rami neri e grigi).

HODGSON ⁽⁹⁾ ha anche notato alcune differenze negli spettri energetici delle particelle α emesse in stelle, con e senza rinculo, con 3-6 rami.

Altri tipi di analisi mettono egualmente in evidenza le molteplici differenze tra le stelle con rinculo (c.r.) e senza rinculo (s.r.), differenze che, come le precedenti, non dipendono solo dalla diversa percentuale, in ciascuna categoria, delle stelle generate in nuclei leggeri, ma da un diverso andamento dell'insieme di processi che determinano il fenomeno di disintegrazione del nucleo quando è visibile il rinculo.

Alcune di queste analisi sono dovute a DELLA CORTE *et al.* ⁽⁴⁾, per stelle a 3 rami. Ne riassumiamo i risultati nello schema seguente:

⁽⁵⁾ R. G. SEED: *Phys. Rev.*, **87**, 182 (1952) (A).

⁽⁶⁾ G. BERNARDINI, E. T. BOOTH e S. J. LINDENBAUM: *Phys. Rev.*, **85**, 826 (1952)

(I parte).

⁽⁷⁾ A. MANFREDINI: *Nuovo Cimento*, **8**, 195 (1951).

⁽⁸⁾ G. BELLIBONI e B. VITALE: *Nuovo Cimento*, **10**, 72 (1953).

⁽⁹⁾ P. E. HODGSON: *Phil. Mag.*, **43**, 934 (1952).

	Stelle c.r.	Stelle s.r.
1) Distribuzione angolare delle risultanti ottenute associando un vettore unitario ad ogni ramo:	isotropa	anisotropa, con collimazione in avanti.
2) Distribuzione in modulo di tali risultati:	eccesso di grandi moduli	in accordo con quella prevedibile per una distribuzione isotropa dei rami.
3) Distribuzione della « apertura » della stella (angolo minimo comprendente le tre proiezioni):	in accordo con quella prevedibile per una distribuzione isotropa dei rami	eccesso di grandi aperture.
4) Distribuzione dei « volumi » delle stelle, ottenuti associando un vettore unitario ad ogni ramo:	come sopra	eccesso di piccoli volumi.

HODGSON ⁽¹⁰⁾ ha analizzato la distribuzione del minimo angolo tra le proiezioni dei rami, per stelle a tre rami. Le stelle c.r. obbediscono ad una distribuzione casuale, mentre la distribuzione relativa alle stelle s.r. presenta un eccesso di angoli grandi.

BELLIBONI *et al.* ⁽⁸⁾ hanno analizzato la distribuzione degli angoli nello spazio tra le tracce nere, in stelle con 8-12 rami neri e grigi. Nelle stelle c.r. la distribuzione è casuale, in quelle s.r. è presente una notevole correlazione a 90°.

Infine PERKINS ⁽¹⁾ e più tardi HARDING *et al.* ⁽²⁾ hanno studiato la distribuzione in modulo della risultante di vettori associati alle sole α o ai soli protoni, e la distribuzione angolare di quest'ultima rispetto al rinculo, per stelle divise in due intervalli: 7-14 e 15-22 rami ionizzanti ($E < 100$ MeV). Nelle stelle della seconda categoria la risultante relativa alle α presenta una distribuzione con un eccesso verso i moduli grandi; la sua distribuzione angolare presenta un netto massimo in corrispondenza di un angolo di circa 180° con il rinculo.

L'insieme dei dati sperimentali raccolti finora permette alcune considerazioni ed ipotesi sul meccanismo di formazione del rinculo e, in genere, sul tipo di disintegrazione nucleare che dà luogo ad una stella c.r..

Si può spiegare una parte dei fenomeni osservati considerando le stelle c.r. come disintegrazioni generate in prevalenza in nuclei pesanti ^(4, 7, 9, 10); ma

⁽¹⁰⁾ P. E. HODGSON: *Phil. Mag.*, **43**, 190 (1952).

alcune esperienze interessano solo le stelle generate in nucleo pesante, sia o no presente il rinculo (⁸). Questa considerazione e l'analisi delle correlazioni intrinseche tra rami e rinculo, ora messe in evidenza, ci portano a considerare il rinculo, insieme ai diversi fenomeni che si presentano nelle stelle c.r., come dovuto a un particolare andamento della disintegrazione nucleare.

La risultante associata alle α è, almeno nelle stelle molto grandi (^{1,2}), opposta al rinculo; sembra corretto ammettere che quasi tutte le α siano emesse in processi di tipo evaporativo: se ne deduce che, almeno in parte, il moto del nucleo è dovuto all'impulso ceduto ad esso dalle particelle emesse durante l'evaporazione. Inoltre il modulo della risultante delle α è statisticamente maggiore di quello prevedibile per una loro emissione non correlata: ciò può essere interpretato come conseguenza di una correlazione intrinseca delle α tra di loro, con predilezione per i piccoli angoli (^{1,2,4}).

Per spiegare l'andamento osservato HARDING *et al.* (²) hanno proposto il seguente meccanismo, valido per stelle molto grandi (più di 15 rami ionizzanti): gli urti del primario con i nucleoni del nucleo genererebbero delle zone di « riscaldamento locale » dalle quali potrebbe o evaporare un fiotto di α e pochi protoni, strettamente collimati, o talvolta staccarsi un frammento più pesante, con notevole energia cinetica ed altamente eccitato, che in seguito si frazionerebbe anch'esso in α . La parte residua del nucleo, debolmente riscaldato, e messa in moto dall'impulso acquistato in questo processo, darebbe poi luogo a qualche protone e a un maggior numero di neutroni evaporativi e, raffreddata, alla traccia di rinculo.

Sempre per le stelle grandi, PERKINS (¹) ritiene interpretabili i dati sperimentali con l'ipotesi di un processo analogo alla fissione.

Non è possibile però interpretare anche le stelle di bassa energia c.r. con uno dei meccanismi precedenti (ad esempio, per l'isotropia angolare dei rami neri (^{7,8})).

HARDING (³) ha quindi proposto di considerare il moto del nucleo come dovuto alla somma vettoriale di due impulsi: il primo ceduto al nucleo dal primario (con un meccanismo non specificato) ed il secondo acquistato durante l'evaporazione. Poichè il primo impulso è nella direzione del primario, ed il secondo praticamente isotropo, questo modello può giustificare la osservata distribuzione angolare dei rinculi rispetto alla verticale.

Le altre correlazioni tra rami e rinculi non sono prevedibili o spiegabili con questo modello, se non si specifica il meccanismo di cessione dell'impulso al nucleo da parte dell'emissione diretta.

Noi abbiamo cercato di precisare un tale meccanismo, sulla base del seguente modello: il primario, nell'attraversare il nucleo, determina una cascata di nucleoni che vengono in parte emessi direttamente; l'energia di eccitazione del nucleo determina una seconda fase di emissione, quella evaporativa. Abbiamo seguito, mediante un Montecarlo, le varie fasi di formazione del rinculo.

I dati da noi raccolti ed i risultati del Montecarlo ci permettono di concludere che, quando l'impulso ceduto al nucleo è stato notevolmente alto, in conseguenza di particolari fluttuazioni nel meccanismo della disintegrazione, queste finiscono con il determinare, oltre la formazione di un rinculo visibile, anche le altre caratteristiche presenti nelle disintegrazioni in cui esse hanno avuto luogo.

Abbiamo diviso il lavoro in quattro parti:

- 1) Dati sperimentali.
- 2) Meccanismo di formazione del rinculo; sua analisi statistica con un Montecarlo.
- 3) Risultati del Montecarlo.
- 4) Confronto dei dati sperimentali con i risultati del Montecarlo; discussione e conclusioni.

1. — Dati sperimentali.

Sono state analizzate 444 stelle c.r., generate dalla radiazione cosmica in lastre nucleari Ilford G5 spesse 1200 μ , esposte verticali a 4550 m s.l.m. Le due lastre usate nel presente lavoro erano circondate da 5 cm di Pb l'una, di Al l'altra. La mancanza di differenze significative tra le statistiche raccolte separatamente nelle due lastre ci ha permesso di unirle in una statistica sola.

In una delle due lastre, nella stessa zona in cui sono state trovate 218 stelle c.r., sono state trovate e studiate, con identici criteri, anche 270 stelle prive di rinculo: esse ci hanno permesso di confrontare tra di loro direttamente le caratteristiche presentate dai due gruppi di stelle.

1.1. *Definizione di « rinculo »*. — Abbiamo definito come rinculo ogni traccia di lunghezza L (in proiezione) compresa tra 1 e 6 μ . Il limite inferiore di L è stato determinato dalla necessità di distinguere tra gli eventuali rinculi ed i grani di fondo o gli elettroni di bassissima energia, spesso presenti presso il centro della stella. Il limite superiore è stato invece scelto in base alle seguenti considerazioni.

BETHE ⁽¹¹⁾ ha calcolato di quanto l'energia di eccitazione del nucleo deve superare l'energia di legame di una particella perchè sia più probabile la emissione di quest'ultima in un processo evaporativo (tenendo conto della penetrabilità della barriera coulombiana) piuttosto che la diseccitazione del nucleo per emissione di un γ o per decadimento β . Egli ottiene un valore di 0,5 MeV per i protoni e di 4 MeV per le particelle α . Queste particelle (particelle di

⁽¹¹⁾ H. A. BETHE: *Rev. Mod. Phys.*, **9**, 194 (1937).

decadimento) non possono quindi avere energie minori di tali valori, ai quali corrispondono, rispettivamente, 6μ per i protoni e 15μ per le α .

Un taglio a 6μ nella L ci permette quindi di escludere dalla nostra statistica eventuali protoni o α di decadimento (abbiamo anche escluso quelle tracce che, pur presentando $L < 6\mu$, erano notevolmente inclinate sul piano dell'emulsione e presentavano quindi una lunghezza effettiva maggiore di 6μ). I dati di HARDING ⁽³⁾ portano inoltre alla conclusione che lo spettro in L dei rinculi di nuclei pesanti termina appunto sui $6-7\mu$, e questo è stato anche confermato, come si vedrà più tardi, dai risultati del nostro Montecarlo.

Il taglio effettuato porta però alla esclusione della maggior parte dei rinculi di nuclei leggeri, almeno se si accettano le ipotesi di HARDING sul meccanismo di formazione dei rinculi.

Per distinguere i rinculi dagli elettroni lenti uscenti dal centro delle stelle o ad esso sovrapposti, si è richiesto che le tracce di rinculo risultassero non troppo distorte e con ionizzazione comparabile almeno con quella delle α a morte.

Nei pochi casi di stelle con più di una traccia molto corta, abbiamo assunto come rinculo quella che meglio rispondeva alle caratteristiche ora indicate.

1.2. *Analisi delle stelle con rinculo.* — Di ogni ramo delle stelle studiate sono stati misurati la ionizzazione specifica I/I^0 e l'angolo della proiezione della traccia sul piano dell'emulsione con la verticale verso il basso, ϑ ; di ogni rinculo sono stati misurati la lunghezza L della sua proiezione e l'angolo ϑ_r di quest'ultima con la verticale verso il basso.

I rami sono stati divisi in quattro categorie, a seconda della loro I/I^0 :

Neri N ($I/I^0 > 6,5$, corrispondenti a protoni di $E < 30$ MeV)

Nero-grigi NG . . $6,5 \geq I/I^0 > 4,0$, corrispondenti a protoni con
 $30 \leq E < 100$ MeV)

Grigi G ($4,0 \geq I/I^0 > 2,0$, corrispondenti a protoni con
 $100 \leq E < 300$ MeV)

Rami al minimo s ($I/I^0 \leq 2,0$, corrispondenti a protoni di $E \geq 300$ MeV)

Non sono state prese in considerazione in questo lavoro, sia nella statistica delle stelle c.r. che in quella delle stelle s.r., le stelle che presentavano più di un ramo s nel semipiano in avanti rispetto alla verticale; ogni eventuale s nel semipiano opposto è stato considerato come primario della stella studiata.

Le stelle prese in considerazione sono state poi suddivise in tre categorie, per cercare di raggruppare quelle generate da primari di E compresa in un intervallo non troppo largo; per operare questa suddivisione ci siamo basati

sul numero di rami N , NG , G ed s che esse presentavano, utilizzando i dati di FISHMAN *et al.* ⁽¹²⁾, LADU ⁽¹³⁾ e LEES *et al.* ⁽¹¹⁾ per stelle generate da primari, neutroni e protoni, di E minore di 300 MeV, e quelli di BERNARDINI *et al.* ⁽⁶⁾ per stelle generate da neutroni di 350 MeV e da protoni di 400 MeV. Si sono ottenute le seguenti categorie:

	Probabile energia dei primari	n. stelle con rinculo
Categoria I	0 - 300 MeV	205
» II	300 - 500 MeV	95
» III	500 - 1 000 MeV	144
		<hr/>
	Totale	444

Le stelle con rinculo di ciascuna categoria rappresentano, rispetto a tutte le stelle della stessa categoria, le seguenti percentuali:

	stelle con rinculo
Categoria I	$41 \pm 7 \%$
» II	$34 \pm 6 \%$
» III	$35 \pm 4 \%$

Se si scelgono, nella statistica di HARDING, le sole stelle con 3-7 rami, che sono paragonabili con la nostra II categoria, si ottiene per esse che il 40% circa hanno rinculo.

La discussione sugli errori per perdite geometriche e per altri fattori nelle percentuali ora date sarà fatta nell'ultima parte del lavoro.

La tabella seguente dà una analisi dettagliata delle stelle c.r., nelle tre categorie:

⁽¹²⁾ H. FISHMAN e A. M. PERRY: *Phys. Rev.*, **86**, 167 (1952).

⁽¹³⁾ M. LADU: *Nuovo Cimento*, **10**, 108 (1953).

⁽¹⁴⁾ C. F. LEES, G. C. MORRISON, H. MUIRHEAD e W. G. V. ROSSER: *Phil. Mag.*, **44**, 304 (1953).

TABELLA I.

A - Numero medio di rami	N	NG	G	s	Totale
Categoria I	2,35	0,22	0	0	2,57
(a) FISHMAN <i>et al.</i> ⁽¹²⁾ . . .	2,21	?	?	0	2,8
(b) » » » . . .	2,74	?	?	0	3,1
(c) LADU ⁽¹³⁾	2,44	?	?	0	3,1
(d) LEES <i>et al.</i> ⁽¹⁴⁾	?	?	?	0	2,9
Categoria II	2,70	0,70	0,46	0	3,9
(e) BERNARDINI <i>et al.</i> ⁽⁶⁾ . . .	3,1	0,42	0,35	0	3,9
Categoria III	2,98	0,62	0,88	0,39	4,77

Stelle generate da: (a) *p* da 240 MeV - escluse le stelle a 0 *N*.
 (b) *n* da 180 MeV - » » » »
 (c) *p* da 240 MeV - » » » »
 (d) *p* da 130 MeV - » » » 0 rami
 (e) *p* da 400 MeV - » » » 0 rami

B - Numero di G / % stelle	G			
	0	1	2	3
Categoria I	100	0	0	0
Categoria II	54	46	0	0
BERNARDINI <i>et al.</i> ⁽⁶⁾	57	40	3	0
Categoria III	40	42	14	4

C - Numero di NG + G + s / % stelle	NG + G + s					
	0	1	2	3	4	5
Categoria I	78	22	0	0	0	0
Categoria II	11	63	26	0	0	0
BERNARDINI <i>et al.</i> ⁽⁶⁾	35	54	9	2	0	0
Categoria III	8	35	39	11	7	0

La fig. 1 dà la distribuzione in numero di rami *N* delle stelle della seconda categoria, paragonata con quella data da BERNARDINI *et al.* ⁽⁶⁾; l'analoga distribuzione per la prima categoria è stata paragonata con quelle date da

FISHMAN *et al.* ⁽¹²⁾ e LADU ⁽¹³⁾: l'accordo è risultato meno soddisfacente che per la seconda categoria.

I confronti ora effettuati ci permettono di considerare validi i criteri seguiti nella divisione delle stelle c.r. in tre categorie, che supponiamo individuate da tre diverse energie dei primari: circa 200 MeV per la I, circa 400 per la II e circa 600-700 per la III.

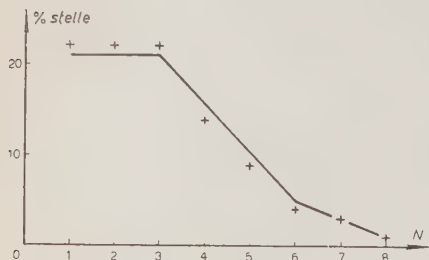


Fig. 1. - % stelle/numero di rami N - II categoria; il tratto pieno rappresenta la distribuzione data da BERNARDINI *et al.* ⁽⁶⁾.

1.3. *Distribuzioni angolari dei rami rispetto alla verticale.* - Definiamo un rapporto B dato da:

$$B = \frac{\text{rami in avanti } (0^\circ \leq \vartheta \leq 90^\circ)}{\text{rami indietro } (90^\circ \leq \vartheta \leq 180^\circ)};$$

La tabella II dà i valori di B per le stelle delle tre categorie, c.r. e s.r., per i rami N e per i $NG + G$; tra parentesi è dato il numero di eventi.

TABELLA II. - Valori di B .

		Categoria		
		I	II	III
Rami N	c.r.	1,1 (482)	1,0 (256)	1,1 (430)
	s.r.	1,3 (220)	1,3 (269)	1,3 (480)
Rami $NG + G$	c.r.	1,8 (45)	0,8 (110)	1,9 (216)
	s.r.	2,1 (16)	1,6 (100)	1,9 (231)

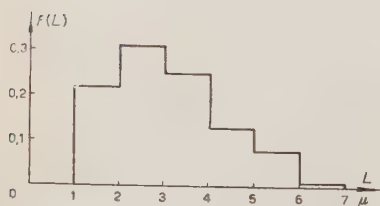


Fig. 2. - I categoria (205 eventi).

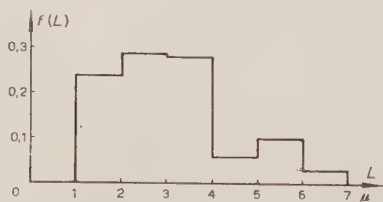


Fig. 3. - II categoria (95 eventi).

Si ritrova per gli N (e per gli $NG + G$ della seconda categoria) la maggiore isotropia angolare già ritrovata da altri autori. MANFREDINI (⁷), per stelle da 3-5 rami di $E \leq 200-300$ MeV, trova un rapporto B (calcolato per tutti i rami) di 1,1 (stelle c.r.) e 1,4 (stelle s.r.).

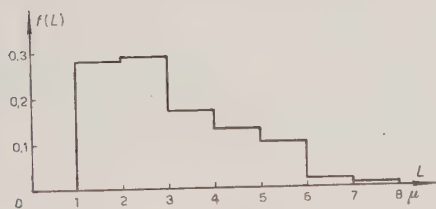


Fig. 4. - III categoria (144 eventi).

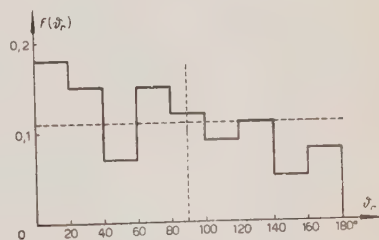


Fig. 5. - I categoria (205 eventi).

1.4. *Analisi dei rinculi.* - Le figg. da 2 a 7 danno le distribuzioni in lunghezza e le distribuzioni angolari rispetto alla verticale $P(\vartheta_r)$ per i rinculi delle tre categorie.

Si trovano i seguenti valori per il rapporto R :

Categoria I	$R = 1,6$
» II	1,7
» III	1,3

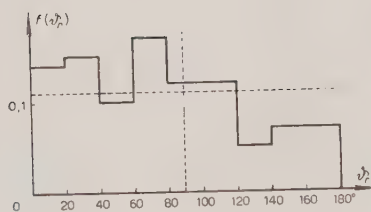


Fig. 6. - II categoria (95 eventi).

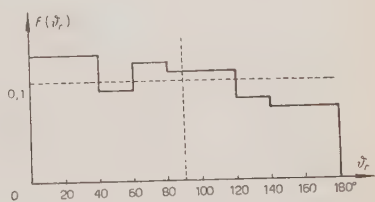


Fig. 7. - III categoria (144 eventi).

L'errore in ϑ_r , determinato dalla lunghezza del rinculo, dalla sua forma e dalla sua inclinazione sul piano dell'emulsione, è stato da noi valutato inferiore ai 10° .

Le distribuzioni in lunghezza ed angolari dei rinculi nelle tre categorie sono praticamente coincidenti, nei limiti degli errori sperimentali e statistici.

1.5. *Relazioni tra rami e rinculi.* — Diamo nelle figg. 8-13 le distribuzioni di $(\vartheta - \vartheta_r)$, angolo tra i rami ed il rinculo, per i rami N e $NG + G$, per le tre categorie. Gli NG sono stati sommati ai G perchè le distribuzioni in $(\vartheta - \vartheta_r)$

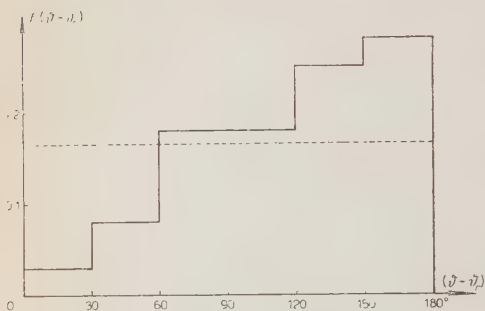


Fig. 8. — I categoria
 N (458 eventi).

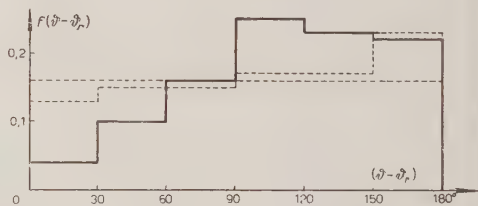


Fig. 9. — II categoria - N (tratto pieno);
Montecarlo - N (tratteggiato) (268 eventi sperimentali; 283 del Montecarlo).

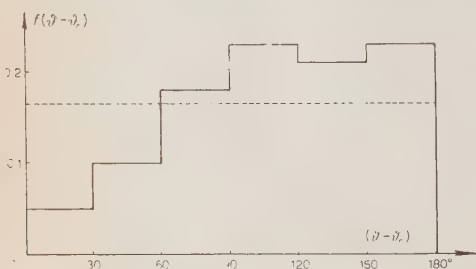


Fig. 10. — III categoria - N (441 eventi).

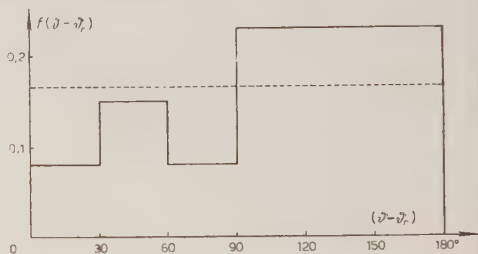


Fig. 11. — I categoria - NG (39 eventi).

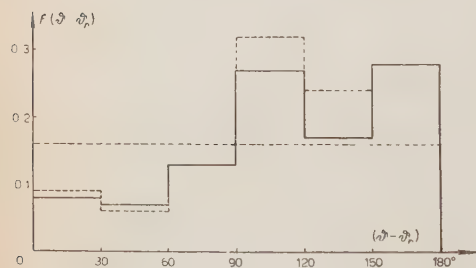


Fig. 12. — II categoria - $NG + G$ (tratto pieno);
Montecarlo - $NG + G$ (tratteggiato) (107
eventi sperimentali; 141 del Montecarlo).

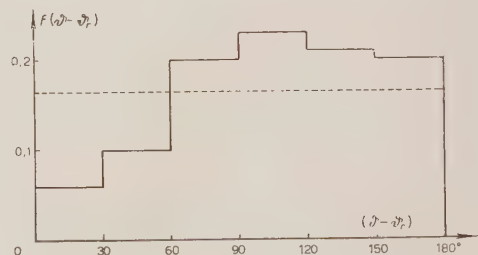


Fig. 13. — III categoria
 $NG + G$ (215 eventi).

erano per essi, nei limiti della debole statistica raccolta, praticamente coincidenti.

Definiamo un rapporto C dato da:

$$C = \frac{\text{rami con } 90^\circ \leq (\vartheta - \vartheta_r) \leq 180^\circ}{\text{rami con } 0^\circ \leq (\vartheta - \vartheta_r) < 90^\circ};$$

la tabella III dà i valori di C per le tre categorie. Sempre tra parentesi è dato il numero di eventi.

TABELLA III. - Valori di C .

	Categoria		
	I	II	III
Rami N	2,5 (482)	2,3 (256)	2,0 (430)
Rami $NG + G$	2,2 (45)	2,6 (110)	2,0 (216)

I valori trovati per C mettono in luce una netta anisotropia della distribuzione in $(\vartheta - \vartheta_r)$, con preferenza verso gli angoli maggiori di 90° , sia per gli N che per gli $NG + G$.

2. - Meccanismo di formazione del rinculo. Sua analisi statistica con un Monte-carlo.

L'interazione nucleare che dà luogo ad una stella di disintegrazione è stata supposta descrivibile con il modello della interazione di un nucleone (primario) con un insieme di nucleoni liberi non interagenti tra loro in una buca rettangolare di potenziale, di profondità $-U$ (SERBER ⁽¹⁵⁾, GOLDBERGER ⁽¹⁶⁾, BERNARDINI *et al.* ⁽⁶⁾).

L'impulso acquistato dal nucleo residuo alla fine della disintegrazione è la risultante vettoriale dei due distinti impulsi acquistati dal nucleo durante i due processi che si susseguono nella disintegrazione: l'emissione diretta (e.d.) e la successiva fase evaporativa (ev.).

2.1. *Impulso ceduto al nucleo durante l'emissione diretta, $P_{e.d.}$.* - Durante l'interazione del primario con il nucleo ed il conseguente processo di cascata

⁽¹⁵⁾ R. SERBER: *Phys. Rev.*, **72**, 1114 (1947).

⁽¹⁶⁾ M. L. GOLDBERGER: *Phys. Rev.*, **74**, 1269 (1948).

e di e.d. viene ceduto al nucleo un impulso per i seguenti meccanismi: accelerazione del primario quando esso entra nel nucleo; uscita dal nucleo di nucleoni che, nel nucleo freddo, avevano un impulso proprio; decelerazione dei rami di e.d. all'uscita dal nucleo; riflessione di parte dei rami della cascata sulla superficie interna del nucleo.

Indichiamo con:

$P_{e.d.}$	impulso ceduto al nucleo durante l'e.d.;
\bar{p}, p'	impulso del primario e dei rami di emissione diretta (nel nucleo);
$-\Delta\bar{p}, \Delta p'$	impulso ceduto al nucleo per l'accelerazione del primario e la decelerazione dei rami di e.d.;
p_r	impulso dei rami della cascata riflessi sulla superficie interna del nucleo;
\bar{p}_i	impulso nel nucleo freddo dei nucleoni urtati durante lo sviluppo della cascata.

Perchè si conservi l'impulso totale del sistema nucleo-primario deve essere:

$$(1) \quad \bar{P}_{e.d.} = \bar{p} - (\sum \bar{p}' - \sum \Delta\bar{p}'),$$

relazione che lega $P_{e.d.}$ con gli impulsi fuori del nucleo; il legame tra $\bar{P}_{e.d.}$ e gli altri elementi che lo determinano può essere trovato solo analizzando l'andamento della distribuzione degli impulsi tra i vari termini nell'interno del nucleo ed imponendo in ogni stadio la conservazione dell'impulso totale. Abbiamo semplificato questa analisi con lo schema seguente:

$$\begin{array}{c} \bar{p} \\ \hline \bar{p} + \Delta\bar{p} \end{array} \quad \text{superficie del nucleo}$$

sviluppo della cascata nell'interno del nucleo

$$\begin{array}{c} \bar{p} + \Delta\bar{p} + \sum \bar{p}_i, \\ \sum \bar{p}_r + \sum \bar{p}' \\ \hline \sum \bar{p}' - \sum \Delta\bar{p}' \end{array} \quad \text{superficie del nucleo.}$$

Poichè:

$$(2) \quad \bar{p} + \Delta\bar{p} + \sum \bar{p}_i = \sum \bar{p}_r + \sum \bar{p}',$$

si ha da (1):

$$(3) \quad \bar{P}_{e.d.} = -\Delta\bar{p} - \sum \bar{p}_i + \sum \Delta\bar{p}' + \sum \bar{p}_r,$$

che è la cercata relazione tra l'impulso ceduto dall'emissione diretta al nucleo e i rispettivi contributi degli effetti dovuti alla buca di potenziale (accelerazione e decelerazione), alla uscita di nucleoni che facevano parte del nucleo ed alla riflessione di parte dei rami della cascata. (Il numero di nucleoni urtati, n_i , è in relazione con il numero di nucleoni uscenti, n' , e a quello dei riflessi, n_r :

$$(4) \quad n' + n_r - 1 = n_i).$$

Si può facilmente calcolare il $\Delta\bar{p}$, nel sistema del laboratorio, per nuclei supposti inizialmente fermi; esso è dato da:

$$(5) \quad \Delta\bar{p} = \left[-p + \sqrt{p^2 + 2 \cdot m \frac{m+M}{M} \cdot U} \right] \cdot \text{vers } \bar{p},$$

dove m ed M sono, rispettivamente, la massa del nucleone e quella del nucleo.

Per $M \gg m$, si ha dalla (5):

$$(6) \quad \Delta\bar{p} = [-p + \sqrt{p^2 + 2mU}] \cdot \text{vers } \bar{p}.$$

Ambedue le formule danno, per $\bar{p} \rightarrow \infty$, $\Delta\bar{p} \rightarrow 0$.

Mediante la (5) possiamo analizzare il peso che alcuni dei termini della (3) hanno nella determinazione del $\bar{P}_{e.d.}$: poichè l'impulso del primario è maggiore di quello dei rami di e.d., il termine $\Delta\bar{p}$ è certamente minore di ciascuno dei $\Delta\bar{p}$ (ed è il termine che determinerebbe un movimento del nucleo all'indietro rispetto al primario); mentre non si hanno dati sulla distribuzione angolare dei \bar{p}_r , la caratteristica collimazione in avanti dell'e.d. tenderà, a causa delle $\Delta\bar{p}'$, a muovere il nucleo in avanti rispetto al primario. Il termine $\sum \bar{p}_i$ è invece isotropo rispetto alla direzione del primario.

C'è quindi da attendersi che il contributo dell'emissione diretta alla formazione del rinculo porti tendenzialmente ad una proiezione in avanti del rinculo rispetto al primario.

2.2. *Impulso ceduto al nucleo durante l'evaporazione*, \bar{P}_{ev} . — L'impulso acquistato dal nucleo durante l'evaporazione è eguale ed opposto alla risultante degli impulsi associati a tutti i rami evaporativi:

$$(7) \quad \bar{P}_{ev} = -\sum \bar{p}_{ev}.$$

2.3. *Impulso totale ceduto al nucleo, \bar{P} .*

$$(8) \quad P = P_{e.d.} + \bar{P}_{ev} = \bar{p} - \sum (\bar{p}' - \Delta \bar{p}') - \sum \bar{p}_{ev}.$$

2.4. *Analisi statistica del modello proposto con il Montecarlo.* - Il meccanismo ora proposto per spiegare la formazione del rinculo durante una disintegrazione nucleare si presta ad essere studiato mediante metodi statistici, di tipo « Montecarlo » (ULAM *et al.* ⁽¹⁷⁾; v. anche GOLDBERGER ⁽¹⁶⁾, BERNARDINI *et al.* ⁽¹⁸⁾, PUPPI *et al.* ⁽¹⁹⁾, MEADOWS ⁽²⁰⁾, MUIRHEAD *et al.* ⁽²¹⁾).

Abbiamo assunto i seguenti valori per le grandezze caratteristiche del modello nucleare usato:

$$A=100; \quad N = A/2 = Z$$

$$F_n = F_p = 22 \text{ MeV} \quad (\text{energia massima della sfera di Fermi})$$

$$L_n = L_p = 9 \text{ MeV} \quad (\text{energia minima di legame dei nucleoni})$$

$$\text{Quindi } (U = F + L): \quad U_n = U_p = 31 \text{ MeV.}$$

In questo modello non esistono nel nucleo freddo particelle α libere, che non risultano quindi presenti nella e.d.; si tiene conto delle α solo durante la ev. Per esse si è assunto:

$$L_\alpha = 5 \text{ MeV}; \quad C_\alpha = 13 \text{ MeV.}$$

Si è assunto inoltre che la barriera coulombiana sia impenetrabile e costante durante la ev., anche quando il nucleo raggiunge energie di eccitazione maggiori di 50 MeV.

Nel valutare il contributo della emissione diretta, gli impulsi e gli angoli $\vartheta_{e.d.}$ con il primario delle proiezioni dei rami di e.d. sul piano dell'emulsione sono stati estratti utilizzando gli spettri di energia e le distribuzioni angolari dati da BERNARDINI *et al.* ⁽¹⁸⁾ distintamente per gli N , NG e G di e.d.. Si è avuto cura che il campione di stelle così ottenute riproducesse nel modo più fedele quello ottenuto da BERNARDINI *et al.* ⁽¹⁸⁾: in modo cioè che si conservassero inalterati la distribuzione in energia di eccitazione del nucleo residuo; lo spettro energetico di e.d.; il numero medio di N , NG , e G per ognuna delle quattro categorie in cui è stata divisa la distribuzione dell'energia di eccitazione.

⁽¹⁷⁾ S. ULAM e J. VON NEUMANN: *Bull. Am. Mat. Soc.*, **53**, 1120 (1947).

⁽¹⁸⁾ G. BERNARDINI, E. T. BOOTH e S. L. LINDENBAUM: *Phys. Rev.*, **88**, 105 (1952) (II parte).

⁽¹⁹⁾ G. PUPPI, V. DE SABBATA e E. MANARESI: *Nuovo Cimento*, **9**, 726 (1952).

⁽²⁰⁾ J. W. MEADOWS: *Phys. Rev.*, **88**, 143 (1952) (L).

⁽²¹⁾ H. MUIRHEAD: comunicazione privata.

Questa è data dalla formula:

$$(9) \quad E_{\text{ecc}} = E - (E_{\text{e.d.}} + (n' - 1) \cdot L) = 400 - (E_{\text{e.d.}} + (n' - 1) \cdot 9),$$

dove E è l'energia del primario ed $E_{\text{e.d.}}$ è l'energia totale portata via dagli n' rami di e.d.. La (9) è dedotta nell'ipotesi di nucleo fermo durante l'e.d.; per tener conto della energia cinetica acquistata dal nucleo, in corrispondenza del $P_{\text{e.d.}}$, che è molto piccolo, bisognerebbe introdurre un termine correttivo nel termine $(n' - 1) \cdot L$.

Per il nucleo eccitato si inizierà quindi la evaporazione, durante la quale esso andrà raffreddandosi, perdendo man mano la sua E_{ecc} , mediante l'emissione di neutroni, protoni e particelle α di bassa energia ($E < 30$ MeV).

Nel valutare il contributo della evaporazione, per ogni ramo evaporato sono stati estratti:

- 1) natura della particella;
- 2) energia ed inclinazione sul piano dell'emulsione, per risalire all'impulso ad esso associato nel piano dell'emulsione;
- 3) angolo ϑ_{ev} della proiezione del ramo con la direzione del primario.

1) La natura della particella è stata estratta sui rapporti tra n , p e α evaporativi ottenuti da PUPPI *et al.* ⁽²²⁾ in una analisi statistica delle stelle prodotte dall'assorbimento di π . I dati ottenuti da questi autori, mediati sui differenti rapporti α/p ed n/p in Ag e in Br, sono:

$$n_{\text{ev}}/p_{\text{ev}} = 5,3; \quad \alpha/p_{\text{ev}} = 0,5.$$

Sono stati ritenuti validi questi rapporti perchè la distribuzione della E_{ecc} per le σ è confrontabile con quella data da BERNARDINI *et al.* ⁽¹⁸⁾. Il rapporto $n_{\text{ev}}/p_{\text{ev}}$ non ha dirette verifiche sperimentali, tranne che in un lavoro di COCCONI *et al.* ⁽²³⁾ che, analizzando il numero di neutroni emessi per ogni cattura π^- , trovano valori in buon accordo con quelli previsti da PUPPI *et al.* ⁽²²⁾ sommando, ai 2,77 neutroni evaporativi, i neutroni di emissione diretta. Questo dato, insieme all'accordo riscontrato da PUPPI *et al.* ⁽²²⁾ per la distribuzione in rami ionizzati delle σ , può essere considerato una conferma indiretta di tale rapporto.

Il rapporto assunto per α/p_{ev} è in buon accordo con quello deducibile dalle misure sperimentali ⁽²¹⁾; infatti i dati sperimentali per stelle di energia com-

⁽²²⁾ G. PUPPI: comunicazione privata.

⁽²³⁾ V. COCCONI TONGIORGI e D. A. EDWARDS: *Phys. Rev.*, **88**, 145 (1952) (L).

⁽²⁴⁾ *Progress in Cosmic Ray Physics*, I (Amsterdam, 1952), fig. 20, p. 48.

parabile con quelle studiate danno $\alpha/p = 0,4$, rapporto questo che, tenendo conto della percentuale di protoni di bassa energia derivanti dalla e.d. ⁽¹⁸⁾, diviene $\alpha/p_{ev} = 0,5$.

2) L'energia della prima particella evaporativa è stata estratta sullo spettro corrispondente, per quel tipo di particella, alla E_{ecc} e quindi alla temperatura iniziale; man mano che i rami evaporativi venivano estratti, si è tenuto conto del raffreddamento del nucleo estraendo sugli spettri corrispondenti alle decrescenti energie di eccitazione.

3) Si è supposto che i rami evaporativi siano isotropi rispetto alla direzione del primario; infatti, anche nell'ipotesi che tutto l'impulso del primario sia trasferito al nucleo durante la cascata nucleonica, la distribuzione angolare dei rami evaporativi, isotropa nel centro di massa, si deforma in modo inapprezzabile nel sistema del laboratorio quando si consideri un nucleo pesante.

Terminata l'estrazione di tutti i rami di una stella, sono stati graficamente determinati i vettori $\vec{P}_{e.d.}$, \vec{P}_{ev} e \vec{P} , sia in modulo che in direzione.

3. - Risultati del Montecarlo.

L'analisi statistica con il Montecarlo è stata estesa a 150 «stelle».

3.1. *Caratteristiche dell'impulso ceduto al nucleo.* - La cessione di impulso al nucleo durante la e.d. è il fenomeno generalmente determinante la formazione del rinculo, almeno per le interazioni con i nuclei di protoni di 400 MeV. Le figg. 14-16 mostrano infatti, rispettivamente, le distribuzioni delle velo-

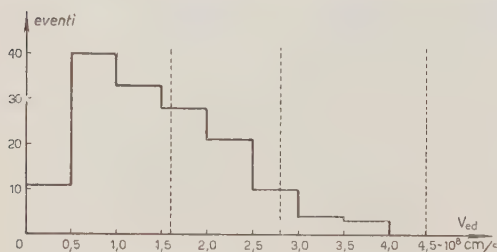


Fig. 14. - Distribuzione in $v_{e.d.}$.

cità acquistate dal nucleo alla fine della e.d., del contributo dato dalla successiva ev. e della velocità risultante del nucleo residuo alla fine della disintegrazione. I valori medi di queste velocità sono:

$$(v_{e.d.}) = 1,4 \cdot 10^8 \text{ cm/s},$$

$$(v_{ev}) = 0,6 \cdot 10^8 \text{ cm/s},$$

$$(v_r) = 1,6 \cdot 10^8 \text{ cm/s}.$$

Come è giustificabile nel modello proposto (v. formula (3)), i rinculi risultano collimati in avanti rispetto alla direzione del primario. Le figg. 17-19 mostrano rispettivamente le distribuzioni angolari rispetto alla direzione del

primario di $\bar{P}_{e.d.}$, \bar{P}_{ev} e P . L'impulso dovuto alla evaporazione risulta, come era da aspettarsi, praticamente isotropo, mentre è nettamente collimato quello dovuto alla e.d.

L'evaporazione non sembra avere un peso determinante nè sul modulo di \bar{P} , nè sull'andamento angolare dei rinculi; infatti le distribuzioni di $v_{e.d.}$ e v_r

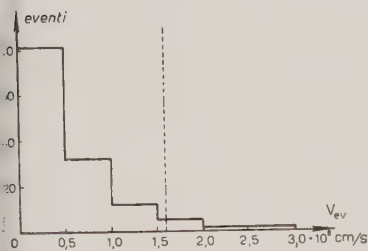


Fig. 15. - Distribuzione in v_{ev} .

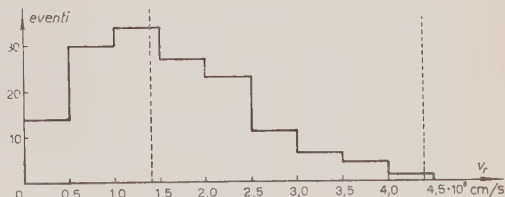


Fig. 16. - Distribuzione in v_r .

hanno praticamente lo stesso andamento e lo stesso valor medio; egualmente per le distribuzioni in $\vartheta_{e.d.}^r$ e ϑ_r ; inoltre notevoli fluttuazioni del rapporto $v_{e.d.}/v_{ev}$ risultano poco frequenti.

La distribuzione di ϑ_r dà:

$$R = 3,7 \pm 1,0.$$

3.2. Rinculi « visibili » e « non visibili ». - Le distribuzioni ora trovate non sono confrontabili direttamente con i dati sperimentali: non tutti i rinculi risulteranno infatti osservabili nelle emulsioni nucleari.

In genere, come si è già detto, non sono osservabili rinculi di lunghezza minore di $1-2 \mu$ in proiezione sul piano dell'emulsione; questa lunghezza minima determinerà quindi un taglio, nello spettro delle velocità, fra rinculi « visibili » e « non visibili ». Egualmente il limite superiore della lunghezza del rinculo, imposto per eliminare ogni confusione con particelle di decadimento

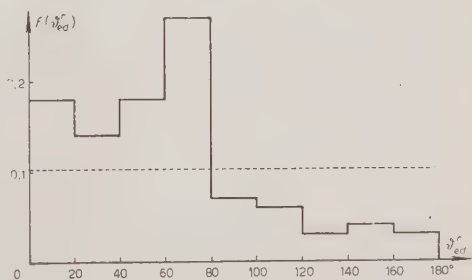


Fig. 17. - Distribuzione in $\vartheta_{e.d.}^r$.

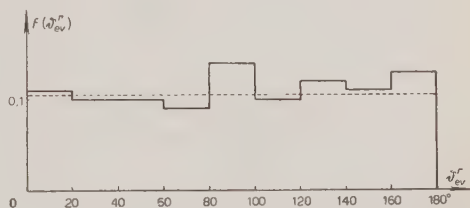


Fig. 18. - Distribuzione in ϑ_{ev}^r .

(nelle nostre misure circa 6μ in proiezione) può determinare un altro taglio nello spettro delle velocità, tra i rinculi «visibili» e quelli che, pur essendo osservabili, verrebbero esclusi dalla statistica a causa della loro lunghezza.

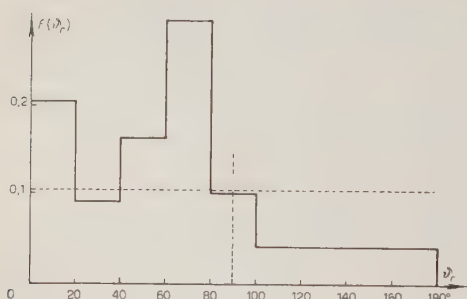


Fig. 19. - Distribuzione in ϕ_r .

Per definire le velocità del nucleo alle quali corrispondono questi tagli, abbiamo considerato valida la relazione lunghezza/energia per nuclei pesanti di bassa energia in emulsioni nucleari, data da HARDING ⁽³⁾. Nella zona di più bassa energia ($1-10 \mu$ di lunghezza) questa relazione è approssimabile con una dipendenza lineare: ciò ci ha permesso di passare da un taglio nelle lunghezze in proiezione

sul piano dell'emulsione ad un taglio negli impulsi, e quindi nelle velocità, su questo piano, dati dal Montecarlo.

Poiché la maggior parte dei rinculi di lunghezza compresa fra 1 e 2μ va perduta per fattori geometrici e per altre perdite sistematiche, abbiamo posto un limite inferiore di $1,5 \mu$; abbiamo lasciato 6μ come limite superiore. Si ha:

$$\begin{array}{ll} \text{lunghezza} & 1,5 \mu & v_r = 1,6 \cdot 10^8 \text{ cm/s} , \\ & 6,0 \mu & 4,4 \cdot 10^8 \text{ cm/s} . \end{array}$$

I due tagli sono indicati nelle figg. 14-16: si nota che la sola ev. non darebbe praticamente mai luogo a rinculo visibile e che nella distribuzione di v_r la maggior parte delle velocità è al disotto del limite inferiore ora imposto. Nel nostro Montecarlo, la zona compresa tra i due tagli rappresenta il 44% del totale delle stelle.

Infine, non esistono praticamente rinculi con velocità maggiori del secondo taglio: ciò prova che, almeno a queste energie del primario, un taglio a 6μ per le lunghezze in proiezione, oltre a impedire ogni confusione con particelle di decadimento, corrisponde ad un effettivo limite fisico per le possibili lunghezze del rinculo (sempre però per nuclei pesanti) e non determina delle perdite sensibili di rinculi.

Il taglio tra rinculi visibili e non visibili ha una notevole influenza sulla distribuzione angolare dei rinculi; nei rinculi visibili, la collimazione in avanti rispetto alla direzione del primario diventa notevolmente più marcata: si passa da $R = 3,7$ a $R = 9,5$. La distribuzione angolare dei rinculi visibili è data in fig. 33, confrontata con i risultati sperimentali.

3.3. *Stelle con rinculo « visibile » e « non visibile ».* — Le 150 disintegrazioni studiate statisticamente sono state costruite mediante lo stesso meccanismo (e.d. ed ev.); tuttavia solo una parte di esse presenta rinculo visibile: si pone ora il problema di osservare se in queste ultime, insieme al rinculo visibile, sono presenti caratteristiche differenti da quelle analoghe nelle stelle con rinculo non visibile.

Le distribuzioni angolari dei rami rispetto al primario per le due categorie di stelle, praticamente coincidenti per i N , mostrano una minore anisotropia del NG e G nelle stelle con rinculo visibile (figg. 20-21). Il numero medio di rami N, G e G e le loro energie medie risultano praticamente eguali per le due categorie.

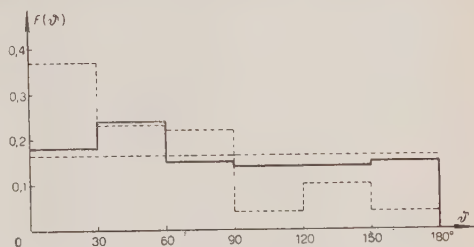


Fig. 20. — Distribuzione angolare dei rami NG : stelle con rinculo visibile (tratto pieno) e non visibile (tratteggiato) (41 eventi per stelle c.r.; 74 eventi per stelle s.r.).

3.4. *Fluttuazioni nell'andamento della emissione diretta e della evaporazione determinanti caratteristiche nelle relazioni « rami-rinculo ».* — Il modello proposto riesce anche a rendere conto delle notevoli fluttuazioni che si

per la formazione del rinculo, comprendendo un così gran numero di processi concomitanti, riscontrano nelle distribuzioni angolari ed in lunghezza dei rinculi e nel legame di questi ultimi con i rami delle stelle. Cercheremo di analizzare queste fluttuazioni dividendo le stelle in alcune categorie schematiche, che permettono di semplificare il problema e di trarre, dai dati del Montecarlo, alcune utili informazioni sull'influenza che hanno, nella determinazione delle caratteristiche del rinculo e delle stelle, i numerosi processi concomitanti ai quali abbiamo accennato.

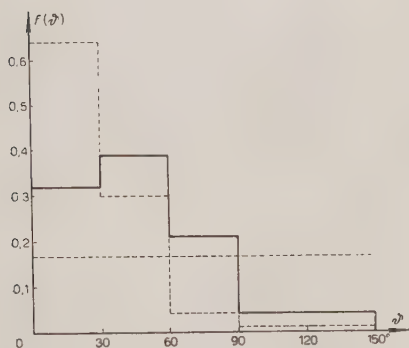


Fig. 21. — Distribuzione angolare dei rami G : stelle con rinculo visibile (tratto pieno) e non visibile (tratteggiato) (44 eventi per stelle c.r.; 74 eventi per stelle s.r.).

1) *Fluttuazioni nell'andamento dell'emissione diretta.* — Un ramo di e.d., uscendo dal nucleo, gli cede un impulso della sua direzione e

nel suo verso di moto. Quindi per la emissione di un solo ramo di e.d., e se non intervenissero altri processi, l'angolo tra $\bar{P}_{e.d.}$ e questo ramo uscente sarebbe

nullo; ci sarebbe quindi da attendere una forte tendenza verso i piccoli angoli nella distribuzione di $(\vartheta_{e.d.} - \vartheta_{e.d.}^r)$, dell'angolo cioè tra i rami di e.d. e $\bar{P}_{e.d.}$, e una forte collimazione in avanti di $\bar{P}_{e.d.}$, perchè tale è l'andamento della e.d..

Ma $\bar{P}_{e.d.}$ è determinato, in una singola stella, in genere da più rami di e.d. e, ancora, da quelli riflessi sulla superficie interna del nucleo e dai nucleoni perduti dal nucleo (oltre al termine, meno importante, dovuto alla accelerazione del primario) (v. formula (3)). L'intervento quindi degli altri processi concomitanti distrugge questa correlazione e, nella maggior parte dei casi, come vedremo, la inverte verso gli angoli grandi.

Per rendercene conto, divideremo le stelle nelle seguenti categorie schematiche:

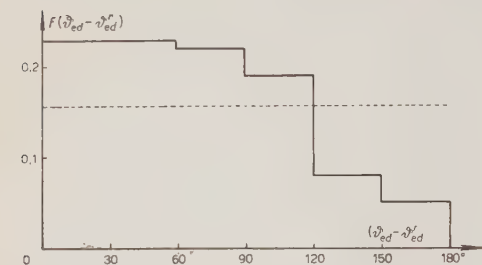


Fig. 22. — Stelle con rinculo non visibile, in avanti - $N + NG + G$ (229 eventi).

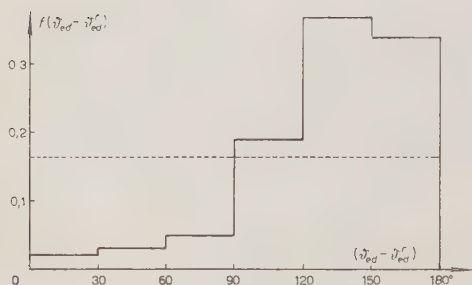


Fig. 23. — Stelle con rinculo non visibile, indietro $N + NG + G$ (88 eventi).

- A) Rinculo « non visibile » — in avanti rispetto al primario ($v_{e.d.} < 1,6 \cdot 10^8$ cm/s),
- B) » » » — indietro » » » »
- C) » « visibile » — in avanti » » » ($v_{e.d.} \geq 1,6 \cdot 10^8$ cm/s),
- D) » » » — indietro » » » »

Il taglio tra rinculi « visibili » e « non visibili » è stato fatto sul modulo di $\bar{P}_{e.d.}$ e su $\vartheta_{e.d.}^r$. Le considerazioni che seguono danno anche una diretta indicazione del comportamento dei rami di e.d. rispetto al rinculo finale della disintegrazione (\bar{P}), per la poca importanza del rinculo evaporativo nel determinare il modulo e la distribuzione angolare del rinculo finale.

Siccome il numero medio di e.d. N , NG e G per stella e le rispettive energie

medie si conservano praticamente inalterati nelle quattro categorie, le fluttuazioni determinanti la formazione del rinculo visibile sono da ricercarsi soprattutto nelle distribuzioni angolari dei rami di e.d..

Restando praticamente invariata l'energia totale dell'e.d. in ogni stella, una maggiore collimazione dei rami darà luogo ad una risultante degli impulsi associati con essi $[\sum(\bar{p}' - \Delta\bar{p}')] molto vicina all'impulso del primario (\bar{p}) e quindi il nucleo riceverà un piccolo impulso (v. formula (1)). Inoltre una sia pur piccola componente trasversale della risultante degli impulsi associati alla emissione diretta modificherà notevolmente la direzione di moto del rinculo, a causa della piccolezza della sua componente longitudinale. Queste due considerazioni giustificano quindi sia la maggiore collimazione dei rami di e.d. nelle stelle con rinculo non visibile (figg. 20 e 21) sia il maggior sparpagliamento angolare dei rami non visibili per $0^\circ \leq \vartheta_{e.d.}^r < 90^\circ$.$

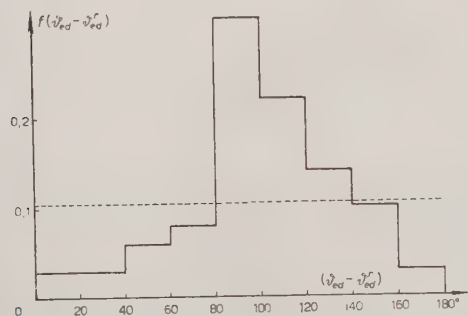


Fig. 26. - Stelle con rinculo visibile, avanti G (64 eventi).

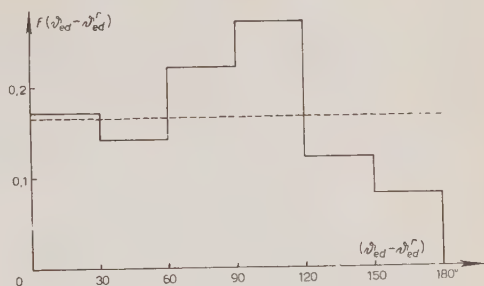


Fig. 24. - Stelle con rinculo visibile, avanti N (51 eventi).

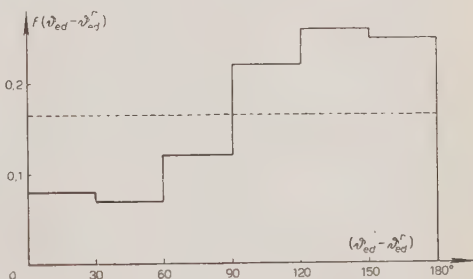


Fig. 25. - Stelle con rinculo visibile, avanti NG (59 eventi).

Questa maggiore collimazione non determina sempre il moto del rinculo all'indietro, essendo presente anche nelle stelle con rinculo non visibile ed in avanti).

Un maggiore sparpagliamento angolare delle tracce di e.d. darà invece luogo (sempre per la formula (1)) ad un rinculo visibile; inoltre la direzione di moto del rinculo sarà influenzata dalla componente trasversale della $P_{e.d.}$ che, es-

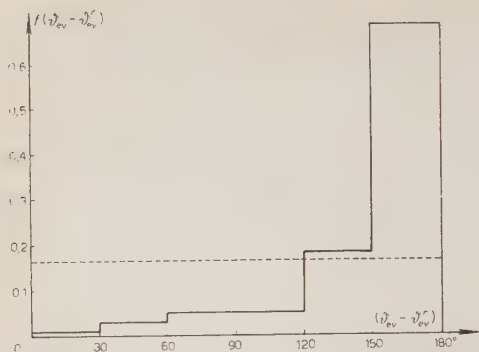


Fig. 27. - Stelle con 1-2 rami evaporativi (78 eventi).

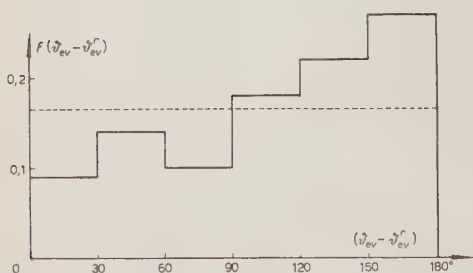


Fig. 28. - Stelle con 7 o più rami evaporativi (176 eventi).

maggior collimazione, dovrebbero dar luogo ad un massimo verso i 90° ;

D) nei rinculi visibili indietro saranno preferiti angoli grandi.

Le figg. 22-26 confermano queste previsioni per le prime tre categorie; la statistica per la *D)*, sebbene debole, mostra anch'essa una netta anisotropia verso i 180° .

Si può concludere che, quando le fluttuazioni nell'e.d. portano alla formazione di un rinculo visibile, essa contribuisce all'andamento delle distribuzioni in $(\vartheta_{e.d.} - \vartheta_r)$ con una netta anisotropia, soprat-

sendo in modulo comparabile con quella longitudinale, renderà più probabili per $\vartheta_{e.d.}^r$ angoli intermedi tra 0° e 90° (fig. 33).

In particolare, da quanto si è detto si deduce:

A) nei rinculi in avanti non visibili saranno preferiti angoli piccoli nelle distribuzioni in $(\vartheta_{e.d.} - \vartheta_{e.d.}^r)$;

B) nei rinculi non visibili indietro saranno preferiti angoli grandi;

C) nei rinculi visibili in avanti, essendo la e.d. più sparpagliata che in *A)*, la risultante degli impulsi associati con essa potrà presentare angoli grandi rispetto al primario; essendo inoltre da parte opposta al rinculo rispetto al primario, saranno preferiti angoli $(\vartheta_{e.d.} - \vartheta_{e.d.}^r)$ intermedi tra 90° e 180° ; i *G*, che conservano la

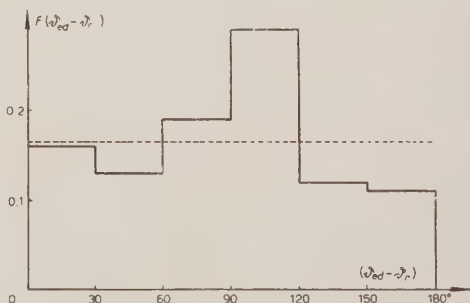


Fig. 29. - Stelle con rinculo visibile *N* (56 eventi).

tutto per le tracce più energiche, dovuta alla preferenza di angoli maggiori di 90° .

2) *Fluttuazioni nell'andamento della evaporazione.*—L'impulso acquistato dal nucleo durante l'evaporazione è, come si è detto, opposto alla risultante degli impulsi associati ai rami evaporativi. Se la stella avesse pochi rami evaporativi, la distribuzione degli angoli $(\vartheta_{ev} - \vartheta_r)$ tra un ramo evaporativo e il rinculo dovuto alla sola ev. dovrebbe quindi presentare una forte anisotropia con preferenza verso i grandi angoli, anisotropia che tenderebbe a diminuire man mano che aumenta il numero di rami evaporativi. Le figg. 27 e 28 confermano questo andamento.

L'influenza che questa anisotropia può avere sulla distribuzione di $(\vartheta_{ev} - \vartheta_r)$, che è la sola confrontabile con l'esperienza, è molto piccola: si è già notato più volte, infatti, che la ev. determina molto meno della e.d. il modulo e la distribuzione angolare di \vec{P} . Essa può acquistare però una certa importanza

nei casi in cui il nucleo si dissecchia mediante l'emissione di poche particelle di energia relativamente alta (per esempio, quando sono emesse particelle α).

L'influenza della evaporazione sulla distribuzione angolare del rinculo dipende quindi, oltre che dal numero di particelle emesse (cioè, a parità di rapporti n/p , α/p), dalla distribuzione assunta per la E_{ecc})

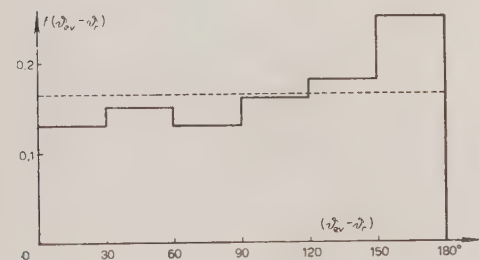


Fig. 31. — Tutte le stelle.
Solo particelle α (36 eventi).

anche dai particolari rapporti n/p ed α/p usati, a causa della differente energia media associata con le particelle evaporative a seconda della loro natura.

3.5. *Distribuzioni di $(\vartheta - \vartheta_r)$.* — Le figg. 29 e 12 danno le distribuzioni in $(\vartheta_{e.d.} - \vartheta_r)$ per le stelle con rinculo visibile e per i rami N e $NG + G$. Si ritrova l'anisotropia prevista nel paragrafo precedente.

La fig. 30 dà la distribuzione in $(\vartheta_{ev} - \vartheta_r)$ per i rami evaporativi nelle

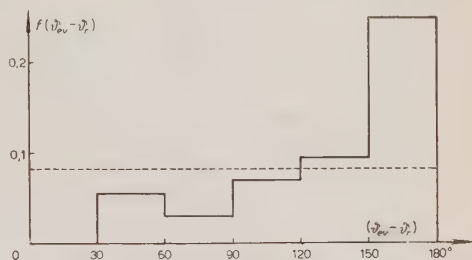


Fig. 30. — Stelle con rinculo visibile (227 eventi).

stelle con rinculo visibile; anche in essa è presente una anisotropia, con preferenza per gli angoli $(\vartheta_{ev} - \vartheta_r)$ grandi. La fig. 31 dà la distribuzione in $(\vartheta_{ev} - \vartheta_r)$ per le sole α , in tutte le stelle del Montecarlo; si ritrova la forte collimazione a 180° prevista nel paragrafo precedente.

Le figg. 9 e 12 danno le distribuzioni di $(\vartheta - \vartheta_r)$ dedotte con il Montecarlo per tutti i rami N (sia di emissione diretta che di evaporazione) e per i $NG + G$: esse sono state confrontate con i dati sperimentali. (Nella fig. 12 ϑ coincide con $\vartheta_{e.d.}$, perchè i rami $NG + G$ sono tutti di e.d.).

4. - Confronto dei dati sperimentali con i risultati del Montecarlo - Discussione e conclusioni.

Confronteremo con i risultati del Montecarlo i dati sperimentali riguardanti la sola seconda categoria di stelle sperimentali, che, come si è visto, è confrontabile con le stelle di BERNARDINI *et al.* ⁽⁶⁾ e può essere attribuito a primari di energia tra 300 e 500 MeV, mentre il Montecarlo è basato sui risultati di BERNARDINI *et al.* ⁽¹⁸⁾ per protoni primari di 400 MeV.

Riteniamo che la percentuale di stelle in nucleo leggero tra le stelle con rinculo studiate sia piccola: i nuclei leggeri manifestano infatti una notevole ten-

denza a disintegrarsi completamente senza lasciare residuo nucleare (LEES *et al.* ⁽¹⁴⁾).

Le conseguenze di questo confronto permettono di estendere la validità del meccanismo proposto anche alle altre categorie di stelle, generate da primari di energia compresa, rispettivamente, tra 0-300 e 500-1000 MeV.

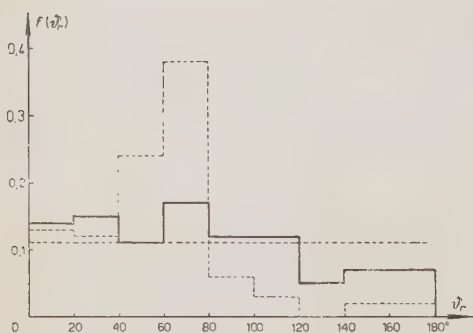


Fig. 32. - Distribuzioni in L dei rinculi delle stelle della II categoria (tratto pieno) e del Montecarlo (tratteggiato).

presentano rinculo; il Montecarlo invece prevede che ben 61 di esse abbiano rinculo più lungo di 1μ in proiezione sul piano dell'emulsione. Abbiamo allora, per identificare la zona dello spettro in cui ha luogo questa perdita di rinculi, normalizzato i dati del Montecarlo a 61 eventi, e quelli sperimentali a 34 (fig. 32).

Si nota che l'accordo tra le due distribuzioni è molto buono, se si esclude il tratto compreso tra 1 e 3μ ; ci sembra quindi di poter localizzare in questa

4.1. *Distribuzione in lunghezza dei rinculi.* - Si è già visto che, su 100 stelle della seconda categoria, solo 34 pre-

zona (e soprattutto tra 1 e $1,5 \mu$) la maggior parte dei rinculi che vengono perduti per ragioni puramente geometriche (sovrapposizione con rami fortemente ionizzanti, ecc.) o per la difficoltà di discriminare tra essi e i grani di fondo o gli elettroni lenti, ecc.

Se si tiene poi conto della percentuale, difficile a precisare, di stelle di disintegrazione in elementi leggeri senza rinculo, il divario risulta minore di quello osservato.

Poichè la maggior parte della perdita è localizzata tra 1 e $1,5 \mu$, sono stati confrontati con i dati sperimentali i risultati del Montecarlo per le sole stelle con rinculo di $L > 1,5 \mu$. Con questo taglio, si troverebbe una percentuale del 44% di rinculi visibili: la percentuale sperimentale ($\sim 34\%$) può essere ricondotta a quest'ultima quando si tenga conto della residua perdita tra $1,5$ e 3μ , della presenza, nel totale delle stelle, di disintegrazioni in elementi leggeri e dell'errore statistico di cui essa è affetta.

Tenendo conto della distribuzione angolare dei $P_{e.d.}$ e del valore medio di $v_{e.d.}$, si trova come valore medio per la componente longitudinale di $v_{e.d.}$:

$$(\bar{v}_{e.d.})_{\text{long}} = 0,2 \cdot 10^8 \text{ cm/s ;}$$

questo valore risulta circa un terzo di quello calcolato da HARDING ⁽³⁾: $0,57 \cdot 10^8 \text{ cm/s}$.

Il modello proposto da HARDING ⁽³⁾ e quello discusso in questo lavoro portano a due distribuzioni in lunghezza dei rinculi fondamentalmente diverse: nello spettro di HARDING, il massimo è intorno ai 2μ e quindi la forte percentuale di stelle senza rinculo è giustificabile solo con l'introduzione di forti perdite geometriche, che non sono certamente presenti almeno nelle stelle a pochi rami; quello risultante dal Montecarlo, invece, presenta il massimo al di sotto di 1μ : la maggior parte dei rinculi viene quindi perduta perchè il nucleo non dà traccia osservabile; questo nuovo fattore di perdita giustifica la notevole percentuale di stelle s.r.

Le distribuzioni sperimentali della L non sono differenti in modo significativo nelle tre diverse categorie di stelle (figg. 2-4). In particolare essa tende a zero tra $6-7 \mu$, dimostrando una certa indipendenza dell'impulso massimo ceduto al nucleo dall'energia del primario. Come si è visto, un limite superiore di 6μ è proprio quello previsto dal Montecarlo per primari di 400 MeV.

4.2. *Distribuzione angolare dei rinculi rispetto al primario o alla verticale.* — La distribuzione angolare trovata con il Montecarlo, per i rinculi visibili, rispetto alla direzione del primario è nettamente anisotropa: c'è da attendersi che lo sparpagliamento dei primari intorno alla verticale renda molto meno sensibile questa anisotropia nella distribuzione angolare dei rinculi rispetto alla verticale.

Le due distribuzioni sono date in fig. 33; si ha:

Montecarlo $R = 9,5 \pm 5,0$;

Dati sperimentali . . . $R = 1,7 \pm 0,6$ (II cat.).

Abbiamo cercato di tener conto dello sparpagliamento angolare dei primari mediando la distribuzione angolare del Montecarlo su una loro distribuzione isotropa nell'emisfero superiore (ipotesi non troppo lontana dalla realtà, trattandosi, per la maggior parte, di stelle generate da neutroni di bassa energia): da $R_{\text{prim}} = 9,5$ si ottiene $R_{\text{vert}} = 2.2$.

Tenendo conto dell'errore statistico presente nei due valori dati per R , pensiamo che il valore di R sperimentale non sia in contrasto con quello del Montecarlo, ma sia spiegabile con il solo sparpagliamento angolare dei primari rispetto alla verticale, alla quale si è costretti a riferire le distribuzioni sperimentali.

Le altre due categorie di stelle danno rapporti R praticamente eguali (v. § 1.4)

a quello della seconda ed al valore già dato da HARDING ⁽³⁾ per stelle con 9-19 rami ($1,7 \pm 0,3$).

Misure di R su stelle prodotte da protoni monoenergetici da ciclotrone danno valori notevolmente più alti e talvolta comparabili con quello del Montecarlo: SEED ⁽⁵⁾ dà 6.3 per p da 100 MeV; LADU ⁽²⁵⁾ dà 2,5 per p da 240 MeV.

4.3. *Distribuzione degli angoli* ($\vartheta - \vartheta_r$). — Le distribuzioni degli angoli ($\vartheta - \vartheta_r$) tra i rami N , NG e G ed il rinculo sono, come si è visto, determinate in modo preciso dal modello usato per la formazione del rinculo: o, meglio, sono determinate statisticamente dal diverso peso che, in una statistica significativa, assumono i diversi processi concomitanti e le loro fluttuazioni. Esse sono il risultato della sovrapposizione di più distribuzioni, ciascuna con una sua caratteristica anisotropia; nell'andamento complessivo esse mostrano ancora una debole anisotropia verso gli angoli grandi, per quel che riguarda i N , ed una analoga ma più marcata anisotropia per i $NG + G$.

Le figg. 9 e 12 riportano anche le distribuzioni in ($\vartheta - \vartheta_r$) ottenute con il Montecarlo per i N e i $NG + N$, confrontate con quelle sperimentali.

La fig. 9 mostra chiaramente che l'anisotropia dei rami N sperimentali è

⁽²⁵⁾ M. LADU: comunicazione privata.

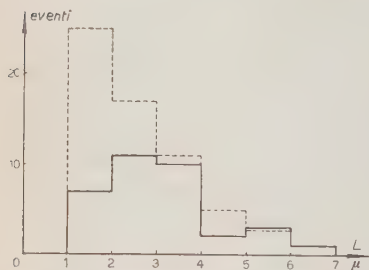


Fig. 33. — Distribuzioni angolari dei rinculi della II categoria (tratto pieno) e del Montecarlo (tratteggiato).

nettamente maggiore di quella prevista dal Montecarlo; la fig. 12 mostra invece che non vi è alcuna differenza significativa per i $NG + G$.

La discordanza osservata per i N , tra i quali predominano (nel Montecarlo) i rami di origine evaporativa (227 contro 56 di e.d.) può avere ragioni diverse e forse contemporaneamente agenti. In primo luogo, può dipendere dal fatto che il confronto è effettuato tra tutti i rami di energia minore di 30 MeV del Montecarlo e i soli rami ionizzanti (cioè p ed α) delle stelle sperimentali; inoltre può dipendere da imprecisione nei rapporti n/p ed α/p usati nel Montecarlo e non giustificati finora in modo preciso sperimentalmente; può essere infine funzione della particolare distribuzione della E_{ecc} .

Per il primo punto, abbiamo analizzato le distribuzioni in $(\vartheta - \vartheta_r)$ del Montecarlo per i soli protoni di $E < 30$ MeV: malgrado i differenti spettri evaporativi dei protoni e dei neutroni e quindi le differenti energie medie per ramo, non abbiamo riscontrato nella distribuzione dei soli protoni alcuna differenza significativa rispetto alla distribuzione di tutti i rami N , almeno nei limiti della debole statistica raccolta.

Per il secondo punto, se il rapporto n/p da noi usato è troppo alto, un suo eventuale abbassamento potrebbe, diminuendo il numero di rami evaporativi, aumentare l'anisotropia verso i 180° . Non abbiamo alcuna indicazione su quali correzioni bisognerebbe apportare al rapporto n/p ; riteniamo tuttavia di averlo sopravvalutato perchè la distribuzione in rami ionizzanti delle stelle del Montecarlo è in disaccordo con quella data da BERNARDINI *et al.* ⁽⁶⁾ per stelle prodotte da protoni di 400 MeV.

Per il terzo punto, anche se le E_{ecc} date da BERNARDINI *et al.* ⁽¹⁸⁾ e da noi usate sono state forse sottovalutate rispetto a quelle reali (KIND ⁽²⁶⁾) un loro incremento, portando ad un incremento della parte evaporativa, aumenterebbe anche il numero medio di rami evaporativi e tenderebbe quindi a diminuire anche di più l'anisotropia riscontrata.

Forse una parte della perdita dei rineuli con angoli molto piccoli rispetto ai rami neri è giustificabile con la semplice perdita geometrica; ma in ogni caso questa perdita non dovrebbe superare, a causa del piccolo numero di rami N nelle stelle da noi studiate, il 5% circa.

La discordanza osservata può essere giustificata, oltre che con le considerazioni precedenti, ricorrendo ad un fenomeno nuovo e non contemplato nel modello studiato che intervenga talvolta nella formazione del rinculo e dia luogo ad una più marcata anisotropia verso gli angoli maggiori di 90° ; una anisotropia di questo genere è già stata riscontrata, come si è visto nell'introduzione, su stelle molto grandi e per le sole particelle α ed è stata spiegata con l'ipotesi di processi di evaporazione locale, durante i quali una piccola zona del nucleo, fortemente riscaldata, evapora particelle in modo aniso-

⁽²⁶⁾ A. KIND: comunicazione privata.

tropo, contribuendo quindi con un notevole impulso alla formazione del rinculo. Questo fenomeno dovrebbe quindi poter essere esteso, a volte, anche a disintegrazioni di più bassa energia.

L'anisotropia delle $(\vartheta - \vartheta_r)$ per i $NG + G$ non è spiegabile con il modello proposto da HARDING ⁽³⁾, che porterebbe ad angoli piccoli tra i rami di e.d. ed il rinculo, nè con l'ipotesi che il moto del nucleo sia dovuto alla sola evaporazione.

Anche nelle altre due categorie di stelle (figg. 8, 10, 11 e 13) è presente una notevole anisotropia verso i 180° nelle distribuzioni in $(\vartheta - \vartheta_r)$ sia per i N che per i $NG + G$. Questo è una delle ragioni che ci fanno ritenere che un unico meccanismo determini la formazione del rinculo in un largo intervallo di energia del primario.

4.4. *Conclusioni.* — Le distribuzioni in lunghezza dei rinculi, le loro distribuzioni angolari, il % di stelle con rinculo visibile e, parzialmente, le distribuzioni in $(\vartheta - \vartheta_r)$ sono in accordo con le previsioni che è possibile trarre dal modello proposto. La maggiore anisotropia riscontrata per i rami neri potrebbe rendere plausibile l'esistenza di fenomeni di evaporazione locale, appena sensibili a queste energie del primario, e che divengono man mano più importanti fino a dar luogo ai vistosi fenomeni di correlazione riscontrati per le α nelle stelle molto grandi. A questo fenomeno, anche ad energie non troppo alte, sovrapporsi fenomeni di scissione del nucleo in più frammenti: talvolta, infatti, una stella di disintegrazione presenta più «rinculi».

Il rinculo sarebbe quindi la traccia lasciata dal nucleo residuo alla fine della disintegrazione nucleare; il moto del nucleo sarebbe dovuto all'impulso acquistato a spese della emissione diretta ed a quello che compensa l'impulso associato alle particelle evaporative (eventualmente emesse anche in fenomeni di evaporazione locale).

La formazione di un rinculo visibile comporta in questo modello la coesistenza di particolari fluttuazioni nell'andamento della cascata e della evaporazione: quando queste fluttuazioni hanno luogo, la formazione del rinculo è accompagnata, come si è mostrato, da alcune altre caratteristiche della stella.

Alcune delle caratteristiche dei rinculi (loro proiezione in avanti nelle lastre esposte ai raggi cosmici ed in quelle esposte a protoni accelerati da ciclotroni, distribuzione in lunghezza), le percentuali di stelle con e senza rinculo, alcune delle caratteristiche presentate dalle stelle con e senza rinculo (maggiore isotropia dei rami nelle stelle con rinculo e le conseguenze da essa derivanti) raccolte nella Introduzione, rientrano tra le conseguenze del modello proposto. La sempre maggiore importanza di fenomeni di evaporazione locale potrebbe spiegare i dati raccolti da alcuni autori (PERKINS ⁽¹⁾, HARDING *et al.* ⁽²⁾) per stelle di alta energia.

Alcuni particolari nel comportamento delle stelle a pochi rami con rinculo

(vedi, ad esempio, DELLA CORTE *et al.* ⁽¹⁾) non sono invece analizzabili utilizzando i dati del Montecarlo, valido per primari di 400 MeV.

È in corso una analisi sperimentale delle stelle con rinculo prodotte da protoni di ciclotrone di varie energie.

Ringraziamo vivamente il prof. N. DALLAPORTA per l'interesse e l'aiuto continuo con cui a seguito tutto il nostro lavoro; il prof. G. PUPPI ed il dott. A. KIND per le utili discussioni durante il suo svolgimento; gli osservatori M. GRECO, D. NARCISO e R. VENTURA per l'intelligente collaborazione prestata, nella esplorazione delle lastre e nelle estrazioni del Montecarlo.

Nota aggiunta in bozza.

Il modello ora discusso trova una conferma in alcuni risultati sulle stelle di σ , gentilmente comunicatici dalla dott. E. MANARESI. Infatti, nelle stelle di σ il rapporto C (§ 1.5) raggiunge i valori:

Numero di rami delle	σ_1	σ_2	σ_3
C	$2,9 \pm 1,6$	$1,7 \pm 0,7$	$1,1 \pm 0,4$

Ci sembra che il predominio di angoli grandi nelle distribuzioni di $(\theta - \theta_r)$ per le σ possa essere attribuito all'assorbimento, in molte delle σ , di tutti i termini di una delle due cascate nucleoniche, che hanno avuto origine per assorbimento del π^- da parte del nucleo (PUPPI *et al.* ⁽¹⁹⁾). Il rinculo sarebbe allora determinato dalla forte riflessione avvenuta sulla superficie interna del nucleo, e in direzione opposta a quella dell'altra cascata, della quale un termine ionizzante è risultato visibile.

SUMMARY

The characteristics of recoil tracks of stars associated with nuclear disintegrations produced by the cosmic radiation, have been experimentally studied and statistically analysed using the « Montecarlo method. ». This paper has been divided into four parts. 1. Experimental Data. The range and angular distributions with respect to the vertical for recoil tracks for three different types of stars (energy of the primary between 0-300 MeV, 300-500 MeV and 500-1000 MeV) are given. The recoils are directed preferably in the forward direction with respect to the vertical; the values assumed by the ratio:

$$R = \frac{\text{forward recoils}}{\text{backward recoils}}$$

for those categories are: $R = 1.6, 1.7, 1.3$. The distributions of angles $(\theta - \theta_r)$ formed by the tracks and the recoil for black and « fast » ($I/I_0 < 6.5$) tracks show a marked

anisotropy with a preference for angles near 180° . — 2. The Mechanism of Formation of the Recoil. The Statistical Analysis by the «Montecarlo method». The mechanism for the formation of the recoil is the following: during the interaction of the primary with the nucleus and the consequent process of the nuclear cascade, a momentum is transferred to the nucleus by the following mechanisms: acceleration of the primary when it enters the nucleus; emission from the nucleus of nucleons that, in the cold nucleus, had a finite momentum; deceleration of the knock-on nucleons as they leave the nucleus; reflection of part of the nucleons of the cascade on the inside surface of the nucleus. To this momentum is added that required by the nucleus during the subsequent evaporation. The total momentum transferred to the nucleus at the end of the disintegration has been determined graphically utilizing 150 examples of nuclear disintegrations constructed statistically by the «Montecarlo method», based on the angular and energy distribution of the tracks given by BERNARDINI *et al.* for disintegrations produced by 400 MeV protons. — 3. Results of the «Montecarlo method». The greater number of recoils obtained by the «Montecarlo method» has ranges less than 1μ , and therefore are not visible in photographic emulsions. Therefore we have analyzed separately the characteristics presented by the star according to whether the recoil was visible or not. The mean velocity assumed by the nucleus is $V_r = 1.6 \cdot 10^8$ cm/s. The angular distribution of the recoil shows a net anisotropy in the forward direction with respect to the primary ($R = 3.6$ for all recoils, $R = 9.5$ for the visible recoils only). The frequency distributions of $(\vartheta - \vartheta_r)$ show a marked anisotropy near 180° , both for black as well as «fast» tracks. — 4. Comparison of Experimental Data with the Results of the «Montecarlo method». Discussion and Conclusions. The experimental data for the second category of stars (primary of energy 300-500 MeV) is in good agreement with the results of the «Montecarlo method»; except that the anisotropy in the distribution of $(\vartheta - \vartheta_r)$ for black tracks is more marked than that predicted. This greater anisotropy renders plausible the existence of phenomena of local evaporation, barely present at this energy, and that becomes gradually more important resulting in the apparent effect of correlation found by other authors for alpha-particles associated with very large stars. The agreement found allows us to consider as valid the proposed model: the formation of a visible recoil is associated in this model with the coexistence of particular fluctuations in the behaviour of both the cascade and the evaporation. When these fluctuations are present, the formation of the recoil is accompanied by several other features of the star.

Sulla diagonalizzazione della hamiltoniana nella teoria dei campi (II).

B. FERRETTI

Istituto di Fisica dell'Università - Roma

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Roma

(ricevuto il 13 Giugno 1953)

Riassunto. — Sviluppando idee contenute in precedenti lavori si propone un metodo di rinormalizzazione per l'elettrodinamica quantistica che non fa uso della teoria delle perturbazioni in nessun passo. In tale metodo la carica è trattata come un parametro che può esser fatto variare con continuità. Viene mostrato come, data la rappresentazione di FEYNMAN delle osservabili per un certo valore della carica, si possa costruire detta rappresentazione per un valore della carica differente di poco, eliminando formalmente per rinormalizzazione le divergenze che sorgono quando si fa variare la carica.

1. — Introduzione

Nella prima parte di questo lavoro ⁽¹⁾ abbiamo discusso alcune questioni preliminari relative alla diagonalizzazione della hamiltoniana nella teoria dei campi, mostrando come fosse conveniente tener conto esplicitamente della accensione adiabatica della « carica » (costante di interazione) quando si voglia procedere con i metodi d'altra parte usuali della teoria delle perturbazioni (nei casi in cui questo sia possibile) alla diagonalizzazione della hamiltoniana.

Vogliamo in questo lavoro:

a) generalizzare i metodi discussi nella prima parte ai casi in cui la teoria delle perturbazioni non sia applicabile;

b) mostrare come si possa formalmente definire un procedimento di rinormalizzazione in cui non si fa uso di uno sviluppo in serie di potenze della « carica ».

⁽¹⁾ B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, **8**, 108 (1951). Questo lavoro sarà citato nel testo con I.

L'opportunità di svincolarsi nel procedimento stesso della rinormalizzazione dall'uso dello sviluppo in serie di potenze della « carica » appare ora tanto maggiore in quanto noti lavori di DYSON e di W. THIRRING ⁽²⁾ hanno sollevato gravi dubbi sulla convergenza di tali sviluppi in serie.

L'idea del metodo che sarà sviluppato in questo lavoro è espressa in una nota precedentemente pubblicata ^(3, 3 bis); essa consiste nel considerare la carica come una variabile che si può far variare con continuità; la carica e la massa non rinormalizzate sono pensate allora formalmente come funzioni non necessariamente analitiche della carica rinormalizzata. Si tratta allora di vedere le seguenti due cose:

1) supposte note tali funzioni, per un certo valore della carica (rinormalizzata), come esse formalmente variano quando alla carica si dà un incremento infinitesimo;

2) sotto quali condizioni le divergenze che compaiono nella teoria quando si dia un incremento infinitesimo alla carica, possono essere compensate dalla rinormalizzazione stessa.

Come si vedrà il procedimento è molto simile a quello di DYSON, e nel metodo e nello spirito. Ne differisce soltanto in quanto svincolato da ipotesi sulla analiticità delle funzioni della carica in gioco, fin dall'inizio (sull'importanza di questo punto si tornerà nella discussione). Ne è simile nello spirito, in quanto fornisce un metodo, almeno in linea di principio, per « costruire » le grandezze rinormalizzate tramite un certo procedimento (aperta restando la questione della esistenza di certi limiti). In ciò il presente lavoro differisce da quello di KÄLLÉN ⁽⁴⁾ che pure si è occupato di dare una definizione delle costanti di rinormalizzazione indipendenti da uno sviluppo in serie di potenze della carica.

2. - Operatori nella rappresentazione di Feynman.

Nella prima parte di questo lavoro (che citeremo d'ora innanzi con (I), avevamo preso in considerazione una hamiltoniana della forma:

$$(2.1) \quad H = H_0 + \lambda V,$$

⁽²⁾ F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **85**, 631 (1952); W. THIRRING: *Helv. Phys. Acta*, **26**, 33 (1953).

⁽³⁾ B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 899 (1950).

^(3 bis) Il Prof. TOMONAGA mi ha gentilmente comunicato privatamente che anch'egli ha lavorato su una idea simile a quella esposta in questo lavoro giungendo a risultati analoghi a quelli espressi dalle nostre (§ 3). Inoltre mi ha segnalato che I. FUJIWARA ha introdotto un algoritmo simile a quello a cui si riferisce la nota citata in ⁽³⁾ (I. FUJIWARA: *Progress in Theor. Phys.*, **7**, 433 (1952)).

⁽⁴⁾ G. KÄLLÉN: *Helv. Phys. Acta*, **25**, 417 (1952).

e la relativa equazione di Schrödinger nella rappresentazione di interazione ⁽⁵⁾

$$(2.2) \quad i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda \underline{V} \varphi.$$

La soluzione della (2.2)

$$\underline{\varphi}(t) = \overset{t}{\Pi} \underline{\varphi}(-\infty)$$

è ottenibile in generale qualora si riesca effettivamente a costruire l'operatore $\overset{t}{\Pi}$ definito formalmente mediante un prodotto infinito cronologicamente ordinato:

$$(2.3) \quad \overset{t}{\Pi} = \lim \Pi_i \left(1 - \frac{i}{\hbar} \lambda \underline{V}(t_i) \Delta t_i \right)$$

(cfr. la (2.7) di (I)).

In certe ipotesi precisate in appendice (App. I e II) l'operatore $\overset{t}{\Pi}$ esiste ed è unitario. Allora, come già osservato in (I) e come meglio è chiarito in App. I, l'operatore

$$(2.4) \quad \mathcal{E}(\lambda) = \overset{t}{\Pi}^{-1} (H_0 + \lambda \underline{V}) \overset{t}{\Pi}$$

ha gli stessi assi dell'operatore H_0 .

In generale, se A rappresenta una osservabile, l'operatore:

$$(2.5) \quad \underline{\underline{A}} = \overset{t}{\Pi}^{-1} \underline{A} \overset{t}{\Pi}$$

ha elementi matrice, nella rappresentazione in cui H_0 è diagonale, identici agli elementi di matrice di A nella rappresentazione di Heisenberg, la corrispondenza tra gli assi di H_0 e $H = H_0 + \lambda \underline{V}$, essendo quella introdotta dalla trasformazione unitaria di generatrice $\overset{t}{\Pi}$ (cfr. App. I). Ne consegue che mediante la costruzione degli operatori $\underline{\underline{A}}$ può essere ottenuta esplicitamente la rappresentazione di Heisenberg delle osservabili, ossia la risoluzione delle equazioni del moto quantistiche.

⁽⁵⁾ Come in (I) indicheremo con la sottolineatura stati e osservabili nella rappresentazione di interazione. Cfr. (I), formule (2.4) e (2.6).

Accanto agli operatori \underline{A} è conveniente considerare gli operatori

$$(2.6) \quad A_F = \prod_{\underline{A}}^{\infty},$$

dove l'operatore \prod si può identificare con la matrice S di Heisenberg ⁽⁶⁾.

Chiameremo A_F «operatori nella rappresentazione di Feynman» ⁽⁶⁾. Si noti, tenendo presente la (2.3) che si può cercare di definire direttamente gli operatori nella rappresentazione di Feynmann mediante il limite ottenuto nel solito modo dei seguenti prodotti infiniti:

$$(2.6-bis) \quad A_F(t) = \lim P \left[\prod_{-\infty}^{+\infty} (1 - i\lambda \underline{V}(t_r) \Delta t_r), \underline{A}(t) \right].$$

P indicando, secondo una notazione di Dyson, un prodotto cronologicamente ordinato (con la convenzione di segno di Wick ⁽⁷⁾).

La considerazione degli operatori nella rappresentazione di Feynman è utile precisamente perchè essi sono esprimibili mediante prodotti cronologicamente ordinati soltanto.

Vogliamo ora trovare un modo comodo di esprimere l'incremento ΔA_F che subisce A_F quando a λ diamo un incremento infinitesimo $\Delta\lambda$. Supporremo che sia V che A siano entrambi esprimibili mediante una somma di un numero finito di addendi, ciascuno dei quali sia a sua volta un prodotto di un numero finito di operatori d'onda relativi alle particelle del sistema in stati definiti della rappresentazione di interazione, con eventualmente coefficienti (numeri c) funzioni di λ .

Per la valutazione di ΔA_F è allora utile il seguente lemma: «Siano due prodotti Q_1 e Q_2 cronologicamente ordinati, di operatori d'onda

$$Q_1 = P(\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n))$$

$$Q_2 = P(\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n), \varphi_{n+1}(x_{n+1}) \dots \varphi_{n+m}(x_{n+1}))$$

(nell'elettrodinamica, per esempio, questi operatori $\varphi_r(x_r)$ potranno essere le componenti del quadripotenziale $A_{-\mu}(x_r)$ elettromagnetico o gli operatori d'onda $\underline{\psi}_\alpha(x_r)$ o $\underline{\bar{\psi}}_\beta(x_r)$ relativi agli elettroni e ai positroni.

Indichiamo con

$$(\alpha) \quad N_F(\underline{\varphi}_{n+1}(x_{n+1}) \dots \underline{\varphi}_{n+m}(x_{n+1}) | \underline{\varphi}_r(x_r) \dots \underline{\varphi}_s(x_s))$$

⁽⁶⁾ F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **75**, 1736 (1949). Questo lavoro sarà in seguito citato come DYSON II; *Phys. Rev.*, **82**, 428 (1951) (DYSON III); *Phys. Rev.*, **83**, 608 (1951) (DYSON IV).

⁽⁷⁾ G. C. WICK: *Phys. Rev.*, **80**, 268 (1950).

la somma dei « costituenti normali » (secondo WICK e DYSON III ⁽⁶⁾ e ⁽⁷⁾) del prodotto

$$P(\underline{\varphi}_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) \dots \underline{\varphi}_{n+m}(\underline{x}_{n+1}), \underline{\varphi}_r(\underline{x}_r) \dots \underline{\varphi}_s(\underline{x}_s)),$$

ottenuti accoppiando in tutti i modi possibili gli operatori a sinistra con quelli a destra della barra verticale che compare nella espressione (α) (in particolare non accoppiandone alcuno) ma non quelli a destra tra di loro. (Quelli a sinistra essendo relativo allo stesso punto x_{n+1} non si accoppiano in nessun caso tra di loro).

Se allora:

$$Q_1 \equiv \sum c_l(\underline{x}_u \dots \underline{x}_v) : \underline{\varphi}_{r_l}(\underline{x}_r) \dots \underline{\varphi}_{s_l}(\underline{x}_s) :$$

(c_l essendo numeri c) rappresenta Q_1 , espresso come somma dei suoi costituenti normali, si ha

$$Q_2 \equiv \sum c_l(\underline{x}_u \dots \underline{x}_v) N_P(\underline{\varphi}_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) \dots \underline{\varphi}_{n+m}(\underline{x}_{n+1}) | \underline{\varphi}_{r_l}(\underline{x}_r) \dots \underline{\varphi}_{s_l}(\underline{x}_s)).$$

Per dimostrare questo lemma basta esprimere Q_2 mediante una somma di prodotti i cui fattori siano operatori di distruzione $\underline{\varphi}^-$ e operatori di creazione $\underline{\varphi}^+$, e osservare che i costituenti normali di Q_2 che sono anche costituenti normali di, per esempio,

$$P(\underline{\varphi}_1^-(\underline{x}_1) \dots \underline{\varphi}_r^-(\underline{x}_r) \underline{\varphi}_{r+1}^+(\underline{x}_{r+1}) \dots \underline{\varphi}_{n+1}^-(\underline{x}_{n+1}) \dots \underline{\varphi}_{n+m}^-(\underline{x}_{n+1})),$$

si ottengono da

$$N_P[\underline{\varphi}_{n+1}^-(\underline{x}_{n+1}) \dots \underline{\varphi}_{n+m}^-(\underline{x}_{n+1}) | P(\underline{\varphi}_1(\underline{x}_1) \dots \underline{\varphi}_r(\underline{x}_r) \underline{\varphi}_{r+1}^+(\underline{x}_{r+1}) \dots)] .$$

La verifica di questo ultimo punto è pressochè immediata.

Si consideri ora l'espressione:

$$(2.6-ter) \quad A_F(\Sigma_T, t) = P[\Pi(1 - i\lambda \underline{V}(t_r) \Delta t_r), \underline{A}(t)],$$

dove il prodotto va esteso ai termini relativi a una certa suddivisione Σ_T dell'intervallo $-T \dots +T$ in intervallini Δt_r . Secondo la (2.6-bis) $A_F(t)$ sarebbe il limite a cui tende $A_F(\Sigma_T, t)$ quando il massimo degli intervallini Δt_r tende a zero e T all'infinito.

Se diamo a λ un incremento $\Delta\lambda$, l'incremento di $A_F(\Sigma_T, t)$ a meno di termini dell'ordine di $(\Delta\lambda)^2$ e termini dell'ordine di Δt_r massimo, può essere scritto come

$$\begin{aligned} \Delta A_F(\Sigma_T) = & -i \Sigma_T P[\Pi_s(1 - i\lambda \underline{V}(t_s) \Delta t_s), \underline{A}(t), \Delta(\lambda \underline{V}(t_r) \Delta t_r) + \\ & + P[\Pi_s(1 - i\lambda \underline{V}(t_s) \Delta t_s) \Delta \underline{A}(t)]]. \end{aligned}$$

Il secondo termine al secondo membro, che dovrebbe essere scritto $(\Delta A)_F(\Sigma_T)$ si può anche supporre nullo per semplicità senza ledere essenzialmente la generalità.

Finchè consideriamo T finito, e Σ_T comprendente un numero finito di intervalli, possiamo senz'altro applicare il lemma precedente nel calcolo di $\Delta A_F(\Sigma_T)$ ponendo

$$(2.7) \quad \Delta A_F(\Sigma_T) = -i \sum B_r \Delta t_r,$$

dove

$$B_r = P[\Pi_s(1 - iV(t_s) \Delta t_s), \underline{A}(t) \Delta(\lambda \underline{V}(t_r))].$$

Vediamo come precisamente gli operatori B_r si possono calcolare sfruttando il lemma. Si cominci con il notare che, se \underline{V} come capita nei casi che ci interessano nella teoria dei campi, è esprimibile come un integrale spaziale di una interazione differenziale $A_F(\Sigma_T, t)$ è esprimibile mediante integrali spaziali multipli di operatori che hanno la struttura degli operatori Q_1 presi in considerazione sopra. Analogamente B_r è rappresentabile con analoghi integrali di operatori aventi la struttura di Q_2 . Per il calcolo di questi ultimi operatori possiamo quindi applicare il lemma partendo dagli operatori del tipo Q_1 che figurano in $A_F(\Sigma_T, t)$. A questo scopo sarà anzitutto necessario esprimere gli operatori del tipo Q_1 mediante la somma dei loro costituenti normali.

Osserviamo d'altra parte che qualunque operatore che sia rappresentabile nella rappresentazione di interazione sarà esprimibile mediante una serie del tipo

$$(\beta) \quad \sum \langle \underline{k}_1 \dots \underline{k}_n | \underline{k}'_1 \dots \underline{k}'_{n'} \rangle \underline{a}^-_{\underline{k}_1} \dots \underline{a}^-_{\underline{k}_n}, \underline{a}^+_{\underline{k}'_1} \dots \underline{a}^+_{\underline{k}'_{n'}},$$

dove $\underline{k}_1 \dots \underline{k}_n, \underline{k}'_1 \dots \underline{k}'_{n'}$ sono i quadrivettori che rappresentano gli stati individuali delle particelle libere rispettivamente occupati nello stato « bra » e nello stato « kett » della rappresentazione di interazione tra cui viene calcolato « l'elemento matrice » $\langle \underline{k}_1 \dots \underline{k}_n | \underline{k}'_1 \dots \underline{k}'_{n'} \rangle$ (non è esattamente tale se vi sono bosoni) del generico operatore considerato (si sono omesse per semplicità di notazione le altre variabili indicanti stati di spin, polarizzazione, ecc.). Gli operatori $\underline{a}^-_{\underline{k}_1} \dots \underline{a}^+_{\underline{k}'_{n'}}$ come al solito sono gli operatori di creazione e distruzione relativi agli stati di cui sopra. La sommatoria che compare in (β) va naturalmente estesa a tutti i possibili vettori k nonchè a tutti i punti n ed n' .

Al posto dello sviluppo (β) possiamo ora considerare lo sviluppo equivalente

$$(\beta') \quad \sum_{nn'} \int \dots \int d x_1 \dots d x_{n+n'} f_{n, n'}(x_1 \dots x_n, x_{n+1} \dots x_{n+n'}) \cdot \\ \cdot \underline{\varphi}_1^-(x_1) \dots \underline{\varphi}_n^-(x_n), \underline{\varphi}_{n+1}^+(x_{n+1}) \dots \underline{\varphi}_{n+n'}^+(x_{n+n'}),$$

le funzioni $f_{n,n'}(x_1, \dots, x_{n+n'})$ essendo legate agli elementi di matrice $\langle \underline{k}_1 \dots \underline{k}_n | \underline{k}'_1 \dots \underline{k}'_{n'} \rangle$ attraverso una trasformazione di Fourier (cfr. App. III).

Ora, proprio a uno sviluppo del tipo (β') siamo condotti quando esprimiamo gli operatori di tipo Q_1 mediante la loro decomposizione in costituenti normali, e poi integriamo rispetto alle variabili x_r che non figurano più esplicitamente in nessuno degli operatori « liberi » $\varphi(x_1)$, e infine raccogliamo insieme tutti i termini che hanno a fattore lo stesso prodotto di operatori « liberi »

$$\underline{\varphi}^-(x_1) \dots \underline{\varphi}^+(x_{n+n'}).$$

D'altra parte, l'incremento della interazione λV sarà della forma

$$(2.8) \quad \Delta(\lambda \underline{V}) = \sum_i \Delta c_i(\lambda) \int d\mathbf{x}' \underline{\varphi}_i(\underline{x}') \dots \varphi_{s_i}(\underline{x}')$$

+ termini analoghi contenenti derivate degli operatori φ . Ciascuno dei termini di $\Delta(\lambda \underline{V})$ darà un contributo a ΔA_F il quale risulterà dalla somma di tutti questi contributi (se $\Delta A_F = 0$).

Consideriamo in particolare il contributo dato dal termine:

$$\Delta c_i(\lambda) \int d\mathbf{x}' \underline{\varphi}_i(\underline{x}') \dots \varphi_{s_i}(\underline{x}').$$

Se

$$A_F(\Sigma_T, t) = \sum_{n,n'} \int \dots \int dx_1 \dots dx_{n+n'} f_{nn'}(\Sigma_T, t, x_1 \dots x_{n+n'}) \cdot \underline{\varphi}_1^-(x_1) \dots \varphi_{n+n'}^+(x_{n+n'})$$

è la rappresentazione (β') di $A_F(\Sigma_T, t)$ ottenuta, come si è detto sopra, dalla decomposizione in costituenti normali degli operatori di tipo Q_1 relativi a $A_F(\Sigma_T, t)$ ricordando la (2.7) si ha che il contributo parziale in parola (che indicheremo con $\Delta_i A_F(\Sigma_T, t)$ sarà dato da

$$(2.8') \quad \Delta_i A_F(\Sigma_T, t) = \sum \Delta t_r \Delta c_i(\lambda) \int d\mathbf{x}' \int \dots \int dx_1 \dots dx_{n+n'} \cdot f_{n,n'}(\Sigma_T, t, x_1 \dots x_{n+n'}) N_F(\underline{\varphi}_i(\mathbf{x}; t_r) \dots \varphi_{s_i}(\mathbf{x}; t_r) | \underline{\varphi}(x_1) \dots \varphi_{n+n'}^+(x_{n+n'})).$$

Per esempio, se si considera nella elettrodinamica quantistica il termine di interazione ordinaria:

$$\mathcal{H} = -ie \underline{A}_\mu(x') \underline{\bar{\psi}}(x') \gamma_\mu \underline{\psi}(x')$$

dovrà essere calcolato:

$$N_F(\underline{A}_\mu(x') \underline{\bar{\psi}}(x') \gamma_\mu \underline{\psi}(x') | \varphi_1(x_1) \dots \varphi_{n+n'}(x_{n+n'})).$$

Questa espressione consiste secondo (α) , nella somma di tanti termini otte-

nuti accoppiando tutti e tre o due o uno o nessuno degli operatori a sinistra della barra, in tutti i modi possibili, con tutti gli operatori $\varphi_1^-(x_1) \dots \varphi_{n+n'}^+(x_{n+n'})$ a destra.

Per esempio, supposto che φ_1^- sia A_ν^- , il termine che si ottiene accoppiando $A_\mu(x') A_\mu^-(x_1)$ sommato a quello che si ottiene accoppiando nella analoga espressione $A_\mu(x')$ e $A_\mu^+(x_1)$ dà un risultato del tipo:

$$(\gamma) \quad -i \Delta \lambda e h c f_{n,n'}(x_1 \dots x_{n+n'}) D_F(x' - x_1) \sum \Pi \varphi_r(x_r),$$

dove $\sum \Pi \varphi_r(x_r)$ rappresentano la somma di tutti i prodotti degli operatori « liberi » con i relativi segni per tener conto dell'antisimmetria nel caso dei fermioni, ottenuti a partire dagli operatori $\bar{\psi}(x') \psi(x')$ e da tutti gli operatori « liberi » $\varphi(x_s) \dots \varphi^*(x_l)$ che non sono stati accoppiati. D_F è la ben nota funzione (cfr., per esempio, i lavori citati di DYSON ⁽⁶⁾).

Integrando rispetto a x_1 la (γ) si ottiene un contributo all'incremento di uno dei termini relativi a $n + n' + 1$ « operatori liberi » nella rappresentazione di $A_F(\Sigma_T, t)$.

I termini contenenti derivate degli operatori φ si trattano in modo simile (tenuto conto delle note cose riguardanti il trattamento dei « normal dependent terms »).

Se ora si ammette che il limite che compare nella (2.6-bis) esista, il procedimento indicato per il calcolo di $A_F(\Sigma_T, t)$ può essere immediatamente esteso al calcolo di ΔA_F qualora di A_F si conosca la rappresentazione di tipo (β') . Vogliamo notare che l'ipotesi che esista una rappresentazione di tipo (β') per A_F implica solo quella che A_F sia rappresentabile nella rappresentazione di integrazione (cfr. App. III).

Nota così la rappresentazione di tipo (β) di A_F per λ , la nostra regola dà il modo di calcolare immediatamente (almeno formalmente) quelle per $\lambda + \Delta \lambda$. È vero che passando da λ a $\lambda + \Delta \lambda$ anche ammesso che la rappresentazione di $A_F(\lambda)$ sia finita, si introdurranno nuove divergenze; in quali ipotesi e come queste siano eliminabili con un processo di rinormalizzazione sarà discusso nei prossimi paragrafi.

3. - Separazione delle divergenze relative agli incrementi degli operatori nella rappresentazione di Feynman.

Vogliamo in questo paragrafo discutere come classificare e isolare le nuove divergenze che si possono presentare nell'incremento degli operatori nella rappresentazione di Feynman, quando si dia un incremento da considerarsi infinitesimo alla costante di accoppiamento λ che figura nella (2.1), limitandoci in questo e nei successivi paragrafi, a prendere in esame il caso della elettrodinamica quantistica. Tali nuove divergenze sorgono eventualmente

nel calcolo degli integrali del tipo

$$(\delta) \quad \int \dots \int dx_1 dx_2 dx' f_{n+n'} \dots (x_1, x_2 \dots x_{n+n'}) D_F(x' - x_1)_F S(x' - x_2)$$

oppure

$$(\delta') \quad \int \dots \int dx_1 dx_2 dx' f_{n+n'} \dots (x_1 x_2 \dots x_{n+n'}) S_F(x' - x_1) S_F(x_2 - x'),$$

o anche

$$(\delta'') \quad \int \dots \int dx_1 dx_2 dx_3 dx' f_{n+n'}(x_1 x_2 \dots x_{n+n'}) S_F(x' - x_1) S_F(x_2 - x') D_F(x' - x_3)$$

e simili (scambiando le variabili x_r), che eventualmente si debbono valutare nel calcolo dell'incremento di un operatore A_F .

Si tenga presente che le funzioni $f_{n+n'}$ possono contenere a fattore funzioni δ come $\delta(x_1 - x_2)$ e simili, per cui alcune delle variabili di integrazione potrebbero essere eliminabili immediatamente. In ogni modo, dopo avere eliminato, se è il caso, tali variabili, per la discussione generale degli integrali eventualmente divergenti che stiamo considerando, conviene passare allo spazio dei momenti, utilizzando le trasformate di Fourier rispetto alle variabili di integrazione, sia di $f_{n+n'}$ che delle S_F e D_F .

Si avranno allora da considerare, per esempio, integrali del tipo:

$$(\delta''') \quad \int d\underline{k}_1 d\underline{k}_2 f(\underline{k}_1 \underline{k}_2 \dots) S_F(\underline{k}_1) S_F(\underline{k}_2) D_F(\underline{k}_1 + \underline{k}_2)$$

e simili.

È chiaro che il fatto che tali integrali siano convergenti o divergenti, e in questo secondo caso, la natura della divergenza, dipenderanno da due circostanze:

a) dalle singolarità di $f(\underline{k}_1 \underline{k}_2)$ nell'intorno delle quali la f non sia limitata;

b) e questa seconda circostanza sarà ben più importante e decisiva, dal comportamento asintotico (ossia per valori delle componenti di \underline{k}_1 , \underline{k}_2 , ... tendenti all'infinito) della funzione f stessa.

Si noti che la f oltre che funzione di \underline{k}_1 e \underline{k}_2 ed eventualmente di altri momenti e altre variabili, sarà una funzione di λ .

Nella teoria convenzionale (sviluppo in serie di λ) si suppone che f sia una funzione analitica di λ in un certo intorno dello zero. Ma la natura della dipendenza di f da λ non ha direttamente niente a che fare con la convergenza o con la divergenza degli integrali (δ''') che dipende invece solo dalle circostanze sopra menzionate.

Saranno pertanto le proprietà relative ai punti *a*) e *b*) mostrate dalle funzioni *f* nella teoria convenzionale che nella teoria stessa permettono la eliminazione delle divergenze per rinormalizzazione (qualora naturalmente ci si arresti a una potenza finita nello sviluppo in serie di λ) le quali dovranno essere eventualmente estrapolate al caso generale indipendentemente dal fatto che le *f* siano esprimibili o no mediante una serie di potenze di λ . Anzi, le *f* potrebbero non essere funzioni analitiche di λ , non solo nell'intorno dello zero, ma in nessun punto, ed esistere con le proprietà desiderate ugualmente.

Questa osservazione è piuttosto banale, ma abbastanza importante, perchè permette nella teoria della rinormalizzazione di rendersi indipendenti da uno sviluppo in serie di potenze della costante di accoppiamento, pur usando metodi che ricordano molto da vicino quelli convenzionali.

Cerchiamo pertanto di riesaminare le proprietà *a*) e *b*) nel quadro della teoria convenzionale, e vedere come esse sono estendibili al caso più generale.

Nella teoria convenzionale (sia pure arrestata arbitrariamente a una potenza *N* di λ per assicurare la convergenza), le funzioni $f(k_1, \dots, \underline{k}_n)$ che ci interessano saranno della forma

$$(3.1) \quad f(\underline{k}_1 \dots \underline{k}_n) = \sum^n \lambda^m f^{(m)}(\underline{k}_1 \dots \underline{k}_n).$$

Al termine $f^{(m)}(\underline{k}_1 \dots \underline{k}_n)$ corrispondono più grafici di Feynmann tutti con *n* linee esterne ben determinate aventi, almeno quelli contenenti solo vertici ordinari (cfr. DYSON IV ⁽⁶⁾), proprio *m* vertici. (I grafici che contengono vertici di altra natura ne avranno meno di *m*).

Ora, l'operazione che abbiamo definito nel § 2, con la quale possiamo calcolare l'incremento di A_F corrisponde a considerare per ciascuno dei grafici relativi alla (3.1) una classe di grafici ottenuti aggiungendo al grafico considerato un vertice. Se in particolare consideriamo quella parte di A_F dovuta all'incremento della interazione ordinaria, questo vertice sarà un vertice ordinario.

I nuovi grafici corrispondenti a un grafico dato si otterranno:

- 1) senza connettere il nuovo vertice con il nuovo grafico;
- 2) connettendo il nuovo vertice con il vecchio grafico mediante sostituzione di una linea esterna del vecchio grafico e di una linea (della stessa natura elettronica o fotonica) concorrente al nuovo vertice, con una unica linea, e ciò in tutti i modi possibili;
- 3) mediante analoga sostituzione di due linee esterne del vecchio grafico;
- 4) mediante sostituzione di tre linee esterne come sopra.

Queste operazioni corrispondono evidentemente a quelle definite col simbolo (α) nel lemma del paragrafo precedente.

Il teorema fondamentale di Dyson (DYSON II, ⁽⁶⁾) ci permette allora di ridurre la questione della convergenza o meno degli integrali $\delta' \dots \delta''$ alla struttura dei nuovi grafici.

Si noti però che le divergenze relative ai « vecchi grafici » da cui i nuovi derivano, come si è detto, si debbono già considerare compensate. Pertanto solo le parti di ogni nuovo grafico congiunte al resto da una o due o tre linee (due elettroniche e una fotonica) e contenenti il « nuovo vertice », dovranno essere considerate per la eventuale separazione delle « nuove divergenze ».

Si scorge anche immediatamente che solo nel caso in cui le linee esterne del vecchio grafico concorrenti nel « nuovo vertice » appartengano a una parte del vecchio grafico separabile dal resto secando una o due o al massimo tre linee interne, possono prendere luogo nuove divergenze. Segue che le proprietà topologiche dei vecchi grafici, che interessano per la separazione delle nuove divergenze, sono date dalla divisibilità del vecchio grafico in due parti non connesse, *entrambi contenenti linee esterne* del vecchio grafico, mediante l'operazione di secare una, due, o al massimo tre linee interne.

(Chiaramente, se una delle parti non contiene linee esterne, non interessa, corrispondendo a una « vecchia divergenza » che, come si è detto, si suppone già eliminata; l'unico caso che potrebbe far sorgere difficoltà è quello in cui il « nuovo grafico » abbia solo una o due linee esterne. Ma anche tali difficoltà sono facilmente eliminabili. Cfr. App. IV).

Da quanto sopra segue che è opportuno definire le seguenti nozioni:

1) diremo che un grafico è monosecabile rispetto a un gruppo di linee esterne $k_1 \dots k_n$ se esiste una linea interna, che diremo linea di monosecabilità rispetto al gruppo $k_1 \dots k_n$, secando la quale il grafico si divide in due parti non connesse, la prima contenente le linee esterne $k_1 \dots k_n$, la seconda tutte le altre;

2) analogamente definiremo la nozione di bi- e di trisecabilità rispetto a un gruppo di linee esterne, nonchè quella di linea interna di bi- e trisecabilità rispetto al detto gruppo di linee esterne.

È chiaro che in generale in un grafico dato esisterà più di una linea di monosecabilità rispetto a un dato gruppo di linee esterne. Conviene pertanto definire una ulteriore nozione;

3) diremo linea di ultima monosecabilità rispetto a un gruppo di linee esterne $k_1 \dots k_n$ una linea di monosecabilità rispetto al detto gruppo che divide il grafico in due parti non connesse, di cui quella non contenente il gruppo $k_1 \dots k_n$ non contenga neppure alcuna linea di monosecabilità rispetto al gruppo stesso.

Si può allora dimostrare che, se per un dato grafico e un dato gruppo di

linee esterne esiste una linea di monosecabilità, esiste una linea di ultima monosecabilità e una sola (cfr. App. IV).

Conseguentemente tutte le linee di ultima monosecabilità rispetto alle linee esterne possono essere ordinate formando insieme le parti di grafico connesse al resto da due linee di monosecabilità successive, una « catena di monosecabilità », relativa al gruppo di linee esterne considerato. Chiameremo « anello » della catena di monosecabilità quella parte di grafico connessa al resto da due linee di monosecabilità successive. Per la unicità della linea di monosecabilità, per ogni gruppo di linee esterne esisterà al massimo una catena di monosecabilità.

Analoghe nozioni possono definirsi per la bi- e trisecabilità.

Dato ora un grafico generico con n determinate linee esterne, si consideri una suddivisione qualunque delle n linee esterne in m gruppi di $n_1 \dots n_m$ determinate linee esterne.

Ciascun gruppo può essere pensato connesso agli altri da catene di mono-bi- e trisecabilità e da elementi nè mono- nè bi- nè trisecabili (diremo brevemente insecabili) non appartenenti ad alcuna catena, soltanto in un numero finito di modi dipendenti solo da m .

Se per due determinati grafici aventi le stesse linee esterne, qualunque sia la suddivisione in gruppi di linee esterne, i gruppi corrispondenti sono connessi nello stesso « modo », diremo che i grafici sono dello stesso « tipo ». Per quanto osservato sopra, il numero massimo di tipi possibili di grafici aventi un numero finito determinato di linee esterne è finito e dipende solo da n .

Si noti che due grafici che hanno lo stesso « scheletro » (cfr. DYSON II, nota ⁽⁶⁾) hanno lo stesso tipo, ma non viceversa; vi sono infiniti scheletri diversi che corrispondono allo stesso « tipo ».

Tutte le proprietà topologiche necessarie e sufficienti a definire le nuove divergenze che possono sorgere da un dato grafico, sono date assegnando il « tipo del grafico » ed inoltre il numero degli anelli di tutte le catene di mono-bi- e trisecabilità relative al tipo che possono interessare.

Se specifichiamo oltre a ciò quali delle linee esterne elettroniche si debbano pensare appartenenti alla stessa poligonale, diremo di avere specificato la « specie » del grafico.

Tutti i termini corrispondenti a grafici della stessa specie potranno con ciò essere conglobati.

Potremo allora scrivere:

$$(3.2) \quad f(k_1 \dots k_n) = \sum g_r(k_1 \dots k_n),$$

dove l'indice r corrisponde non a un grafico solo ma ad una « specie ».

La separazione delle divergenze andrà fatta per ogni g_r separatamente. Il procedimento è ovviamente quello solito.

Per esempio, si consideri il caso in cui siano soddisfatte le seguenti condizioni: il gruppo delle tre linee esterne corrispondenti ai momenti k_1 , k_2 e k_3 (due elettroniche e una fotonica), ammettano solo un tripletto di linee di trisecabilità, e non linee di mono- o bisecabilità. Inoltre si supponga che nessuna delle coppie di linee $\underline{k_1 k_2}$, $\underline{k_1 k_3}$, $\underline{k_2 k_3}$ ammetta linee di mono- o bisecabilità.

In tal caso la g_r corrispondente alla « specie » soddisfacente a tali specificazioni sarà della forma (indici spinoriali e di polarizzazione omissi):

$$(\varepsilon) \quad g_r(\underline{k_1 k_2} \dots \underline{k_n}) = \int d\underline{p_1} d\underline{p_2} d\underline{p_3} \delta(\underline{k_1} + \underline{k_2} + \underline{k_3} + \underline{p_1} + \underline{p_2} + \underline{p_3}) \cdot \\ \cdot g'_r(\underline{k_1 k_2 k_3 p_1 p_2 p_3}) S_F(\underline{p_1}) S_F(\underline{p_2}) D_F(\underline{p_3}) g''_r(\underline{p_1 p_2 p_3 k_4} \dots \underline{k_n}),$$

dove g'_r corrisponde all'unico anello della catena di trisecabilità relativa a $\underline{k_1 k_2 k_3}$. (Diremo d'ora innanzi che è la « parte » corrispondente a detto anello).

Si costruisca ora quella parte dell'incremento all'operatore che si sta considerando che si ottiene mediante sostituzione delle tre linee $\underline{k_1 k_2 k_3}$ con linee concorrenti al nuovo vertice. Il termine g_r darà un contributo a tale parte dell'incremento proporzionale a

$$A_r = \int \dots \int d\underline{k_1} d\underline{k_2} d\underline{k_3} \delta(\underline{k_1} + \underline{k_2} + \underline{k_3}) S_F(\underline{k_1}) S_F(\underline{k_2}) D_F(\underline{k_3}) \delta(\underline{p_1} + \underline{p_2} + \underline{p_3}) \cdot \\ \cdot g'_r(\underline{k_1 k_2 k_3 p_1 p_2 p_3}) S_F(\underline{p_1}) S_F(\underline{p_2}) D_F(\underline{p_3}) \cdot g''_r(\underline{p_1 p_2 p_3 k_4} \dots \underline{k_n}) d\underline{p_1} d\underline{p_2} d\underline{p_3}.$$

L'integrazione rispetto a $\underline{k_1 k_2 k_3}$ diverge logaritmicamente; infatti si ottiene in tal modo una divergenza « tipo vertice ». I tre momenti concorrenti della parte « vertice » che si considera sono ovviamente $\underline{p_1 p_2 p_3}$,

Si può allora applicare la solita regola per la separazione delle divergenze. Resta così separata dall'integrale rispetto a $\underline{k_1}$, $\underline{k_2}$, $\underline{k_3}$, una parte convergente $\Delta A_c(\underline{p_1 p_2})$ che si annullerà quando $\underline{p_1} = \underline{p_2}$ e inoltre

$$p_{1\mu} \gamma_\mu = i \kappa_0,$$

κ_0 essendo l'inverso della lunghezza d'onda Compton dell'elettrone.

Oltre a ciò anche l'integrazione rispetto a $\underline{p_1}$ e $\underline{p_2}$ sarà convergente. A questo proposito si noti che:

$$\lim \frac{\Delta A_c(\underline{p_1 p_2})}{(\underline{p_{1,1}^2} + \underline{p_{1,2}^2} + \underline{p_{1,3}^2} + \underline{p_{1,0}^2} + \underline{p_{2,1}^2} + \underline{p_{2,2}^2} + \underline{p_{2,3}^2} + \underline{p_{2,0}^2})^\varepsilon} = 0,$$

dove $\underline{p_{1,1}} \dots \underline{p_{1,0}}$ sono le componenti del quadrivettore $\underline{p_1}$, ε è una qualunque quantità positiva, e $\underline{p_{1,\mu}}$ e $\underline{p_{2,\nu}}$ (μ e ν qualsiasi) tendono all'infinito.

È questa la proprietà asintotica di ΔA_c che assicura la convergenza della integrazione rispetto a $\underline{p_1}$ e a $\underline{p_2}$.

Queste considerazioni possono essere facilmente estese.

Precisare la « specie » del termine g_r significa precisamente esprimere g_r mediante un integrale del tipo (ε) ovviamente generalizzato. Data la « specie » di g_r e dato il « nuovo vertice » nonchè le « linee esterne » da sostituirsi con le linee concorrenti al « nuovo vertice », è data anche la « specie » del contributo Δr all'incremento dell'operatore A_r che stiamo considerando.

Data la « specie » di Δr è possibile come prima cosa riconoscere se il nuovo vertice appartiene o non a una « parte tipo vertice » oppure a una « parte tipo selfenergia » fotonica o elettronica. D'altra parte gli integrali δ sono costituiti per la (3.2) dalla somma di vari addendi, ciascuno dei quali corrispondente a un contributo Δr . Valgono allora le seguenti proprietà:

(i) « Se il « nuovo vertice » non appartiene ad alcuna « parte vertice » o « parte selfenergia » l'integrale Δr è convergente; in caso contrario le divergenze sono separabili con le regole date da DYSON ».

Si tenga presente che il nuovo vertice può esser contenuto entro parti divergenti a loro volta contenute una entro l'altra (per esempio, tornando al caso semplice considerato prima lo si generalizzi pensando che la catena di tripla secabilità ivi considerata abbia più di un anello: si hanno allora diverse « parti vertici » una dentro l'altra).

Naturalmente le divergenze vanno eliminate una dopo l'altra a cominciare dalla più interna.

Possono anche esistere « divergenze sovrapponentisi ». Anche esse vanno trattate nel modo solito ⁽⁸⁾.

Tenute presenti queste circostanze, e detti k i momenti delle linee esterne relativi ai g_r rispetto a cui si deve integrare, valgono ancora le seguenti proprietà:

(i') « Se il nuovo vertice appartiene a una « parte vertice », è separabile con la regola di Dyson dall'integrale rispetto alle variabili k che figurano in A_r , divergente logicamente, una parte finita $\Delta A_{cr}(p_1, p_2)$ funzione di due quadri-vettori p_1 e p_2 e annullantisi alle solite condizioni (cfr. sopra). Tale parte finita soddisfa alla seguente « condizione asintotica »:

$$(3.3) \quad \lim_{\Sigma(p_{1k}^2 + p_{2k}^2) \rightarrow \infty} \frac{\Delta A_{cr}(p_1, p_2)}{(\sum p_{1k}^2 + \sum p_{2k}^2)^\varepsilon} = 0, \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

In conseguenza della (3.3) se non vi sono altre divergenze, sostituendo alla « divergenza tipo vertice » ΔA_{cr} , l'integrale A_r converge.

(i'') « Se il nuovo vertice appartiene a una « parte selfenergia elettro-

(8) ABDUS SALAM: *Phys. Rev.*, **82**, 217 (1951).

nica » è separabile nel solito modo, una parte finita soddisfacente alla proprietà asintotica:

$$(3.4) \quad \lim_{\Sigma p_k^2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta \Sigma_{cr}(p)}{(\sum p_k^2)^{(1/2)+\varepsilon}} = 0.$$

In conseguenza della (3.4) se non vi sono altre divergenze e se si esegue la solita sostituzione, Δ_r converge ».

(i'') Le stesse proprietà valgono se il nuovo vertice appartiene a una parte di selfenergia fotonica, con la differenza che la parte finita separabile $\Delta \Delta_{cr}$ soddisfa alla proprietà asintotica:

$$(3.5) \quad \lim_{\Sigma(p_k)^2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta \Delta_{cr}(p)}{(\sum p_k^2)^{1+\varepsilon}} = 0.$$

(i''') Le proprietà (i'), (i''), (i''') valgono anche quando vi siano parti divergenti contenute una dentro l'altra in qualunque numero, o divergenze sovrappresentandosi, qualora si proceda nella eliminazione delle divergenze nel modo usuale che è stato sopra ricordato.

Infine vale la seguente proprietà:

(i''') « Se, dati tutti gli incrementi Δr relativi a specie appartenenti allo stesso tipo, si sommano le funzioni $\Delta \Delta_{cr}$, $\Delta \Sigma_{cr}$ e $\Delta \Delta_{cr}$ corrispondenti, si ottengono ancora funzioni $\Delta \Delta_{cr} \Delta \Sigma_{cr} \Delta \Delta_{cr}$ che soddisfano alle equazioni (3.3), (3.4) e (3.5) e tali che $\Sigma \Delta$, quando tutte le divergenze sono state sottratte, è ancora convergente ».

Questa proprietà è ovvia nella teoria convenzionale se ci si arresta a un numero finito di termini nello sviluppo in serie di λ , non è più naturalmente tale nel caso contrario.

Come si è visto, le operazioni da farsi per calcolare l'incremento $\Delta \Delta_F$ consistono essenzialmente nell'aggiunta di un « nuovo vertice » ai grafici relativi ad Δ_F . « Aggiungere un vertice » consiste precisamente nel considerare integrali del tipo « δ ».

Ora, questa operazione può venire ripetuta e si può pensare di « aggiungere un numero qualsivoglia di « nuovi vertici ». Se questa operazione viene fatta in un modo determinato, aggiungendo un « nuovo » vertice dopo l'altro, in un ordine stabilito, data la « specie » del grafico di partenza, resta fissata la « specie » di ogni « nuovo grafico », di mano in mano che si aggiungono « nuovi vertici ».

Le operazioni di separazione delle divergenze delle parti finite, possono così successivamente essere ripetute quante volte occorra aggiungendo « nuovi vertici ».

Vale quindi la proprietà:

(i'''''''' " Le proprietà (i), (i'), (i''), (i'''), (i''''), (i''''') continuano a valere quando si ripeta l'operazione di aggiungere un « nuovo vertice » quante volte si voglia, purchè si sottraggano le nuove divergenze di mano in mano che si aggiungono « nuovi vertici » ».

Tutte le proprietà (i), (i'), ..., (i''''') si deducono immediatamente nel caso convenzionale da quanto ha dimostrato DYSON. Sono anche ovvie nel nostro caso se invece di procedere esattamente si procede in via di approssimazione nella maniera seguente: si divida λ in un numero grande a piacere ma finito di parti $\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2 \dots \Delta\lambda_n$, tale che sia $\Delta\lambda_1 + \dots + \Delta\lambda_n = \lambda$, e si proceda poi, per ogni operatore che può interessare, successivamente al calcolo di

$$A_F(0) \equiv \underline{A}, \quad A_F(\Delta\lambda_1), \quad A_F(\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2) \dots A_F(\Delta\lambda_1 + \dots + \Delta\lambda_n) = A_F(\lambda),$$

applicando il procedimento che abbiamo indicato; questa cosa implica di trattare ogni $\Delta\lambda_r$ come se fosse infinitesimo, benchè non lo sia. In ciò consiste l'approssimazione per la quale si trascurano termini dell'ordine di $(\Delta\lambda)^2$ ad ogni passo. In tal caso si possono effettivamente considerare dei grafici come nel caso convenzionale e questi grafici avranno un numero finito di vertici. Quindi il procedimento convenzionale è senz'altro applicabile; l'unica cosa che potrà risultarne differente è la dipendenza da λ delle funzioni f . Ma ciò è proprio quello che si desidera.

Naturalmente in un certo senso la validità di tutto il procedimento dipende dal fatto che il procedimento stesso converga ad un limite quando tutti i $\Delta\lambda_i$ tendono effettivamente a zero. Questa questione però non rientra entro gli scopi del presente lavoro. Possiamo tuttavia dimostrare un punto di interesse più limitato, ma tuttavia concernente la possibilità della coerenza interna del procedimento che abbiamo proposto.

Vale infatti la seguente proposizione: si supponga che le funzioni $f(\lambda, k_1, \dots, k_n)$ possano esprimersi mediante la (3.2) come somma di termini $g_r(\lambda, k_1, \dots, k_r)$ di data specie nel senso definito sopra. Si supponga che allora valgano le proprietà (i) ... (i'''''). Tutte queste proprietà si riprodurranno allora per $\lambda + \Delta\lambda$ essendo $\Delta\lambda$ infinitesimo. La dimostrazione è immediata. Basta infatti osservare che per quanto si è dimostrato nel § 2 si passa dal valore λ al valore $\lambda + \Delta\lambda$ mediante l'operazione che in questo paragrafo abbiamo chiamato « aggiungere un « nuovo » vertice ». Ma allora per la proprietà (i''''') supposta valida per il valore λ , tutte le proprietà (i) ... (i''''') e (i''''') stessa si riproducono per λ e $\lambda + \Delta\lambda$.

Per la proposizione ora dimostrata la (3.2) e le (i) ... (i''''') costituiscono un insieme di proprietà sufficienti ad assicurare non solo la separabilità delle nuove divergenze, in modo simile a quello convenzionale ma la loro selfriproducibilità, e ciò è importante ai fini della coerenza del procedimento.

Vogliamo fare ancora due osservazioni:

1) Le proprietà (i''') e (i'''') banali nel caso convenzionale, non lo sono più nel nostro caso, ove implicano la convergenza e in alcuni casi la uniforme convergenza di certe serie.

2) Il metodo di separazione delle divergenze qui proposto è in principio altrettanto semplice quanto quello originale per la separazione delle divergenze nella matrice S (Dyson II). Le complicazioni della «intermediate representation» sono evitate. Ciò è dovuto al fatto, che, finché ci si ferma a termini del primo ordine nella interazione (la quale nel nostro caso è proporzionale a $\Delta\lambda$) non è necessario tenere esplicito conto della dipendenza dal tempo della costante di interazione, salvo che nel modo solito, trascurando in certi integrali termini relativi a $t = -\infty$ (cfr. appendice I).

4. — Eliminazione delle « nuove divergenze » mediante rinormalizzazione.

Nel paragrafo precedente abbiamo mostrato come, sotto certe ipotesi, le nuove divergenze che sorgono in A_F quando a λ si dà un incremento $\Delta\lambda$, possono essere isolate. Vogliamo mostrare in questo paragrafo che esse possono essere eliminate mediante un procedimento di rinormalizzazione del tipo di quello convenzionale.

Premettiamo alcune osservazioni e lemmi, facendo uso anche in questo caso di proprietà dimostrabili nel caso convenzionale, che estenderemo per ipotesi, mostrando come esse siano riproducibili quando da λ si passa a $\lambda + \Delta\lambda$.

a) Si consideri un grafico, comprendente una poligonale elettronica aperta, avente $s-1$ vertici a, b, c, \dots, u, v, z . Consideriamo l'insieme dei grafici che si ottiene inserendo un nuovo vertice ordinario o in una qualunque delle $s-2$ linee interne della poligonale; la linea fotonica concorrente al « vertice aggiunto » sarà pensata esterna.

Si consideri in particolare il grafico W in cui il « vertice aggiunto » o è inserito, per esempio, tra a e b , e sia γ_α l'operatore γ operante in o .

Sia allora B_α^w il prodotto di tutti i fattori corrispondenti alle linee interne e ai vertici del grafico considerato. B_α^w sarà una funzione dei momenti $\underline{p}_1 \dots \underline{p}_r \dots$ corrispondenti alle linee interne.

Sia \underline{k} il momento relativo alla linea fotonica concorrente in o . Allora, posto

$$I_\alpha^w = \int \dots \int d\underline{p}_1 \dots B_\alpha^w(\underline{p}_1 \dots),$$

dove l'integrazione va estesa ai dovuti momenti interni, si consideri l'espressione $\sum_\alpha I_\alpha^w k_\alpha$.

Allora, se $b_{a,o}^w$ è la funzione che si ottiene omettendo in B_α^w il fattore relativo alla linea elettronica $a-o$ e γ_α e $b_{o,b}^w$ quello che si ottiene omettendo γ_α e il fattore relativo alla linea $o-b$, e se

$$E_{ao}^w = \int \dots \int b_{ao}^w d\underline{p}_1 \dots$$

$$E_{ob}^w = \int \dots \int b_{ob}^w d\underline{p}_1 \dots$$

si ha

$$(4.1) \quad \sum I_\alpha^w k_\alpha = E_{ao}^w - E_{ob}^w.$$

(Cfr. DYSON IV).

Vale nel caso convenzionale ed è del tutto banale la seguente proprietà:

(i'''''''») « La (4.1) si mantiene valida se noi aggiungiamo nuovi vertici al grafico considerato in qualunque numero, o se tramite qualunque numero di nuovi vertici si congiungono tratti di poligonali elettroniche, purchè il grafico che si ottiene soddisfi ancora ai requisiti topologici per cui la (4.1) è valida ».

In altre parole, la (4.1) è indipendente dal numero dei vertici del grafico.

Ora, per l'ipotesi del paragrafo precedente, e tenendo presente la (3.2), per ogni g_r potremo parlare di linee elettroniche esterne appartenenti alla « stessa poligonale » anche nel caso generale. Se allora si suppone che valga la (4.1) e valga la (i''''''') per un certo valore λ , segue che la (4.1) e la (i''''''') stesse valgono per $\lambda + \Delta\lambda$. La dimostrazione è perfettamente simile a quella della analoga proposizione del paragrafo precedente.

b) Le cose seguenti riguardano una estensione della identità di Ward.

b₁) Si consideri ancora nella teoria convenzionale un insieme di grafici A aventi le stesse linee esterne. Sia $C(A)$ la somma dei prodotti di tutti i fattori relativi alle linee interne e ai vertici di ciascun grafico dell'insieme.

Sia $C(A', \mu)$ l'analoga espressione relativa all'insieme ottenuto aggiungendo un vertice ordinario nel quale operi l'operatore γ_μ , a ciascun grafico dell'insieme A , e lasciando il « vertice aggiunto » non connesso al resto. Allora, nel caso convenzionale si ha immediatamente

$$(4.2) \quad C(A', \mu) = \lambda e \gamma_\mu C(A)$$

(e = carica elettrica).

A prima vista la (4.2) pare legata alla condizione di sviluppare le funzioni in gioco in serie di potenze e di λe . In realtà non è così. Per vederlo si può procedere nel modo seguente: si cominci infatti con il considerare il metodo « approssimato » già descritto nel § 3, consistente nel dividere λ in un numero

finito di parti $\Delta\lambda_i$ e nel trattare ogni $\Delta\lambda_i$ come infinitesimo. Supponiamo allora che la (4.2) valga per un certo valore di λ : vogliamo mostrare che vale anche per $\lambda + \Delta\lambda$.

Si noti che l'incremento $\Delta C(A', \mu)$ che subisce $C(A', \mu)$ quando si dà l'incremento $\Delta\lambda$ a λ , è la somma di due parti: la prima è ottenuta identificando il « nuovo vertice » (« nuovo vertice » è quello relativo a $\Delta(\lambda V)$) con il « vertice aggiunto ». Questa parte è data, come si vede immediatamente da:

$$\Delta\lambda\gamma_\mu C(A).$$

Una seconda parte si ottiene inserendo il « nuovo vertice » in una posizione diversa da quella del « vertice aggiunto ». Per valutarla si noti che a ogni grafico Γ di A corrisponde un insieme di grafici $\underline{\Gamma}$ tali che inserendo il « nuovo vertice » in tutti i modi possibili e compatibili con la struttura dei grafici Γ in tutti i grafici $\underline{\Gamma}$, si ottiene proprio il grafico Γ . Ora, ad ogni grafico $\underline{\Gamma}$ corrisponde un grafico e uno solo $\underline{\Gamma}'$ con il « vertice aggiunto » in cui opera γ_μ , e per ipotesi

$$C(\underline{\Gamma}', \mu) = \lambda\gamma_\mu C(\underline{\Gamma}).$$

Indicando con $\Delta_\Gamma C(\Gamma)$ quella parte dell'incremento di $C(\Gamma)$ ottenuta secondo il metodo del § 2 inserendo il « nuovo vertice » in modo da passare da $\underline{\Gamma}$ a Γ e con $\Delta_{\underline{\Gamma}} C(\Gamma', \mu)$ l'espressione analoga, relativa ai grafici Γ' e Γ'' , dalla relazione precedente si ha immediatamente

$$\Delta_{\underline{\Gamma}} C(\Gamma', \mu) = \lambda\gamma_\mu \Delta_{\underline{\Gamma}} C(\Gamma).$$

Ma la seconda parte dell'incremento di $C(A', \mu)$ e rispettivamente l'incremento di $C(A)$ si ottengono sommando su tutti i $\underline{\Gamma}'$ e Γ e rispettivamente su tutti i $\underline{\Gamma}$ e Γ .

Tenuto conto della corrispondenza biunivoca che esiste tra i $\underline{\Gamma}'$ e i $\underline{\Gamma}$, e rispettivamente tra i Γ' e i Γ , si ha allora

$$\Delta C(A', \mu) = \Delta\lambda\gamma_\mu C(A) + \lambda\gamma_\mu \Delta C(A),$$

che, a meno di quantità di ordine superiore in $\Delta\lambda$ dimostra l'asserto. Ora, la (4.2) vale per $\lambda = 0$ e $\lambda = \Delta\lambda_1$, quindi per induzione completa e nella nostra approssimazione, si dimostra per ogni λ .

Al posto di (A', μ) si consideri ora l'insieme (A'', p, μ) , ottenuto aggiungendo un vertice come sopra ad ogni grafico dell'insieme (A) , e sostituendo

una certa linea esterna elettronica di momento p (la stessa per tutti i grafici di 4.1) con una linea concorrente al vertice raggiunto. Si ha allora:

$$(4.2-bis) \quad C(A'', \underline{p}, \mu) = \lambda e \gamma_\mu S_F(\underline{p}) C(A).$$

Anche in questo caso si può dimostrare che se la (4.2-bis) vale per λ vale per $\lambda + \Delta\lambda$. La dimostrazione procede in modo quasi identico a quella della (4.2). Soltanto $\Delta C(A'', \underline{p}, \mu)$ va divisa questa volta in tre parti, la prima che si ottiene quando il « nuovo vertice » è nella posizione del « vertice aggiunto »; la seconda, che si ottiene quando il « nuovo vertice » è nella posizione del vertice del grafico di A a cui concorre la linea elettronica « \underline{p} »; e la terza si ottiene da tutte le altre possibili posizioni del « nuovo vertice ». Per la valutazione del secondo contributo si fa uso di (4.2). Per il resto tutto procede come sopra.

La 4.2-bis) si generalizza ovviamente al caso in cui più di una linea esterna dei grafici di A (le stesse per tutti) concorra al « vertice aggiunto ».

b_2) Si consideri un grafico con un numero finito di vertici, comprendente una poligonale elettronica aperta L , e sia $C(L)$ il prodotto dei fattori relativi ai lati e ai vertici della poligonale. Si consideri l'espressione $\lambda e G_\mu(L)$ ottenuta inserendo un vertice γ_μ in una qualunque delle linee interne appartenenti alla poligonale con linea fotonica concorrente al vertice inserito di momento nullo, e sommando tutti i prodotti $C'(L)$, modificati per la detta inserzione in ciascuno dei lati interni. Chiameremo brevemente « operazione G » l'operazione fatta per ottenere $G_\mu(L)$.

Tenendo conto di quanto dimostrato in b_1), e della relazione

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial S_F}{\partial p_\mu} = S_F \gamma_\mu S_F,$$

abbiamo

$$(4.3) \quad -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial C(L)}{\partial p_\mu} = G_\mu(L),$$

dove \underline{p} è il momento di una linea esterna della poligonale elettronica.

Infatti, indicando con \underline{k}_r il momento fotonico incidente all' r -mo vertice della poligonale, si ha

$$C(L) = \prod \gamma_r S_F(p - \sum^r \underline{k}_i).$$

D'altra parte

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} S_F(p - \sum^r \underline{k}_i) = \frac{\partial}{\partial(p - \sum^r \underline{k}_i)_\mu} S_F.$$

Segue immediatamente la relazione scritta.

Segue allora che se O è una poligonale elettronica chiusa, e se $G_\mu(O)$ indica l'espressione ottenuta eseguendo l'operazione G sulla poligonale O , si ha:

$$\int G_\mu(O) d\underline{p} = 0,$$

dove \underline{p} è il momento relativo a uno qualunque dei lati della poligonale. Ciò segue dal fatto che

$$G_\mu(O) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial C(O)}{\partial \underline{p}_\mu},$$

e dalle proprietà asintotiche di $C(O)$.

Consideriamo ora due poligonali elettroniche L_1 ed L_2 , e sia $\bar{L} = L_1 + L_2$ la poligonale che si ottiene sostituendo una certa linea esterna della prima poligonale e una linea esterna della seconda, con una unica linea interna. Ora si ha:

$$C(\bar{L}) = C(L_1)S_F(\underline{p}')C(L_2),$$

dove \underline{p}' è il momento relativo alla linea interna sostituyente le due esterne. Allora, per la definizione di $G_\mu(L)$ si ha

$$(4.3-bis) \quad G_\mu(\bar{L}) = G_\mu(L_1)S_F(\underline{p}')C(L_2) + C(L_1)S_F(\underline{p}')G_\mu(L_2) + \\ + C(L_1)S_F(\underline{p}')\gamma_\mu S_F(\underline{p}')C(L_2).$$

Segue che se la (4.3) è valida per L_1 ed L_2 essa è valida anche per \bar{L} . Ciò è naturalmente del tutto ovvio nel caso convenzionale. Non lo sarebbe più nel nostro caso più generale, ove non si può far uso di grafici con un numero finito di vertici. In questo caso la (4.3-bis) serve con il solito procedimento a indurre in unione alle (4.2), (4.2-bis) e generalizzazione della (4.2-bis) che se la (4.3) è valida per λ essa è valida anche per $\lambda + \Delta\lambda$.

b_3) Si estenda la definizione di G_μ data in b_2) al caso di un insieme di grafici A qualunque, aventi le stesse linee esterne, facendo corrispondere ad ogni grafico Γ di A un insieme di grafici Γ' ottenuti in ogni linea elettronica interna di Γ un vertice ordinario, con linea fotonica concorrente di momento nullo. Se A'' è l'insieme così ottenuto, si ha, per definizione

$$(4.4) \quad \lambda e G_\mu(A) = C(A'', \mu).$$

Supponiamo ora che A sia l'insieme di tutti i grafici nella approssimazione considerata aventi un certo gruppo di linee esterne, $\underline{k}_1 \dots \underline{k}_n$, e che in tal

caso $\lambda e \int G_\mu(1) d\underline{p}$ integrato a tutti i momenti delle linee interne, rappresenti la funzione $g_r(\underline{k}_1 \dots \underline{k}_n \underline{O})$ relativo al gruppo delle linee esterne $\underline{k}_1 \dots \underline{k}_n$, O , l'ultima essendo una linea fotonica (cfr. § 2, formula (3.2)). Dico che se ciò è vero per λ e per ogni gruppo di linee esterne $\underline{k}_1 \dots \underline{k}_n$, è vero, a meno di termini in $(\Delta\lambda)^2$ anche per $\lambda + \Delta\lambda$. La dimostrazione è del tutto simile a quella usata per dimostrare la (4.2) e la (4.2-bis). Infatti l'incremento di $\lambda e G_\mu(\lambda)$ si scinde in due parti: la prima dovuta a tutte le possibili posizioni del « nuovo vertice » distinte da quella del « vertice aggiunto », dà per le (4.3) e (4.3-bis) $e\lambda \Delta G_\mu(\lambda)$; la seconda, quando il « nuovo vertice » coincide con il « vertice aggiunto » dà $\Delta\lambda e G_\mu(\lambda)$.

c) Eliminazione delle divergenze per selfenergia elettronica e « parte vertice »: Si consideri una « parte » corrispondente a una « nuova divergenza » di tipo selfenergia elettronica, e si supponga che tutte le divergenze interne siano eliminate. Avremo da considerare una funzione del tipo

$$(4.5) \quad \Delta\Sigma(\underline{p}) = \Delta A + \Delta B(p_\mu \gamma_\mu - i\kappa_0) + (p_\mu \gamma_\mu - i\kappa_0) \Delta\Sigma_c(\underline{p}),$$

(cfr la (3.4)), ΔA e ΔB sono invarianti divergenti e proporzionali a $\Delta\lambda$. Ora, la parte ΔA è semplicemente cancellata da una parte dell'incremento del termine di normalizzazione della massa elettronica e non presenta difficoltà.

Per la eliminazione della parte $\Delta B(p_\mu \gamma_\mu - i\kappa_0)$ si debbono distinguere due casi:

c₁) La « parte » selfenergia è inserita in una linea interna. Si ha allora da considerare una espressione come

$$(4.5') \quad S_F(\underline{p}) \Delta B(p_\mu \gamma_\mu - i\kappa_0) S_F(\underline{p}) = \Delta B \frac{1}{2\pi} S_F(\underline{p}).$$

Dobbiamo in tal caso distinguere ancora due casi:

c₁₁) La « parte » considerata ha una linea elettronica « esterna alla parte » di momento \underline{p} concorrente a un vertice ordinario, a cui concorrono inoltre una linea elettronica di momento \underline{p}' e una linea fotonica di momento \underline{p}'' . Si consideri allora la « parte tipo vertice » che si riduce a quella corrispondente per l'operazione G alla $\Delta\Sigma$ quando il momento fotonico è nullo e che abbia come linee elettroniche « esterne alla parte » una elettronica \underline{p} , una elettronica \underline{p}' e una fotonica \underline{p}'' inserite nel resto della espressione che si sta considerando come le \underline{p} , \underline{p}' e \underline{p}'' della $\Delta\Sigma$ + vertice precedentemente considerato.

Alla « parte tipo vertice » considerata corrisponde una funzione del tipo

$$(4.6) \quad \Delta A_\mu = \Delta L \gamma_\mu + \Delta A_{c\mu}(\underline{p}', \underline{p}''),$$

dove $\Delta A_{c\mu} = 0$ per $\underline{p}' = \underline{p}'' = \underline{k}$, essendo $\gamma_\mu \underline{k}_\mu - i\kappa_0 = 0$.

Ora si tenga presente che

$$(4.5'') \quad \Delta B \gamma_\mu = \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \underline{p}_\mu} \right)_{\underline{p} = \underline{k}},$$

dove $\gamma_\mu k_\mu - i\kappa_0 = 0$.

Ricordando allora la (4.2-bis), la (4.5) e la (4.5') si vede subito che il contributo dato dalla seconda parte di $\Delta \Sigma$ + vertice aggiunto è uguale a $\left(\frac{\lambda e}{2\pi} \right) \Delta B \gamma_\mu$.

Ma per la (4.3), la (4.5'') e la (4.6) si ha

$$\frac{\lambda e}{2\pi} \Delta B \gamma_\mu = - \Delta L \gamma_\mu.$$

Dunque la divergenza logaritmica dovuta a $\Delta \Sigma$ + vertice aggiunto si compensa esattamente con quella dovuta a ΔA .

Per vedere come la compensazione avviene nel complesso, conviene compensare metà della divergenza logaritmica di $\Delta \Sigma$ + vertice aggiunto con metà della divergenza di ΔA . L'altra metà della divergenza di ΔA si compenserà con la corrispondente selfenergia inserita sulla linea elettronica \underline{p}' . (Vedremo che ciò capita anche se \underline{p}' corrisponde a una linea esterna).

c_1) La « parte di selfenergia » considerata ha una linea elettronica « esterna alla parte » concorrente a un vertice di « rinormalizzazione della massa elettronica ». Questo caso è estremamente semplice. Infatti, tenuta presente la (4.5') si vede che in questo caso anche ΔB porta una modificazione al termine di rinormalizzazione della massa elettronica. Naturalmente anche ora converrà far riassorbire in tal modo metà soltanto della divergenza logaritmica dovuta alla « parte di selfenergia elettronica » considerata.

Si scorge quindi che, tenuto conto di entrambi i vertici, tra cui la « parte di selfenergia elettronica » è inserita, se non vi sono vertici di natura diversa da quelli presi in esame finora, (ordinari e di rinormalizzazione massa) a cui linee elettroniche possano concorrere, la compensazione delle nuove divergenze corrispondenti a « parti di selfenergia elettroniche » inserite in linee interne, è completa. Considereremo brevemente più avanti il caso in cui ci siano vertici diversi da quelli finora esaminati a cui possano concorrere linee elettroniche.

c_2) La « parte selfenergia » è inserita in una linea esterna. Si ricordi che in tal caso:

$$p_\mu \gamma_\mu - i\kappa_0 = 0,$$

quindi $S_F(\underline{p})(p_\mu \gamma_\mu - i\kappa_0)$ è indeterminato. Si può tuttavia definire un processo di limite, strettamente connesso con l'idea della « accensione adiabatica della carica » (cfr. DYSON IV) per cui tale limite risulta

$$\lim S_F(\underline{p})(p_\mu \gamma_\mu - i\kappa_0) = \frac{1}{4\pi}.$$

In tal modo la divergenza logaritmica dovuta a $\Delta\Sigma$ inserita sulla linea esterna vale esattamente la metà di quella dovuta a $\Delta\Sigma$ inserita su una linea interna. Quindi se non vi sono vertici differenti da quelli esaminati fino ad ora, la compensazione delle divergenze logaritmiche è completa.

c₃) Se vi sono vertici a cui concorrono « linee elettroniche » diversi da quelli considerati fino ad ora, la compensazione non è completa. Ciò capita, per esempio, se si deve considerare ψ_F . Ma allora, come al solito, la divergenza non compensata introduce semplicemente un incremento del fattore di rinormalizzazione (divergente) della ψ_F , come nel caso convenzionale: non si hanno quindi nuove difficoltà.

d) Compensazione delle divergenze dovuta a selfenergia fotonica. Se la « parte di selfenergia fotonica » è $\Delta A(\underline{p})$ per quanto si è detto nel § 3 si dovrà porre

$$(4.7) \quad \Delta A_{\alpha,\beta}(\underline{p}) = \Delta A \delta_{\alpha\beta} + \Delta B p_\alpha p_\beta + \Delta C p^2 \delta_{\alpha\beta} + \underline{p}^2 \Delta A_{\alpha,\beta}(\underline{p}),$$

dove ΔA , ΔB e ΔC sono invarianti indipendenti da \underline{p} . Ora, \underline{p} è una linea fotonica incidente a una « poligonale chiusa elettronica » facente parte dei « grafici » dell'insieme relativi a ΔA . Segue, facendo uso del lemma a) di questo paragrafo, che

$$\Delta A_{\alpha,\beta}(\underline{p}) p_\beta = 0,$$

per qualunque \underline{p} , e conseguentemente deve essere posto

$$\Delta A = 0.$$

Inoltre deve essere

$$\Delta B = -\Delta C,$$

quindi per la (4.7) la parte divergente della $\Delta A_{\alpha,\beta}(\underline{p})$ si riduce a

$$\Delta B(p_\alpha p_\beta - p^2 \delta_{\alpha\beta}).$$

Ma questi termini sono proprio della forma che può essere compensata dai termini derivanti dalla rinormalizzazione della carica, secondo GUPTA e DYSON

(cfr. DYSON IV). Quindi anche le divergenze derivanti dalle « parti di self-energia fotonica » sono eliminabili.

Come si sarà notato, il giuoco della rinormalizzazione delle nuove divergenze, è tutto fondato sulla generalizzazione della identità di Ward e della (4.1) al nostro caso. Ora, noi abbiamo fatto vedere che a meno di termini dell'ordine di $(\Delta\lambda)^2$ questa generalizzazione può essere fatta quando si suddivide λ in un numero grande a piacere ma finito di parti. La questione se il passaggio al limite quando tale numero tende all'infinito sia legittimo, non rientra nell'ambito di questo lavoro.

Le dimostrazioni date però nel corso di questo paragrafo hanno fatto vedere che se la (4.1) e le altre relazioni usate valgono per λ valgono anche per $\lambda + \Delta\lambda$ con $\Delta\lambda$ infinitesimo, e quindi una preliminare coerenza interna del procedimento è assicurata.

Generalizzate le identità di Ward, l'eliminazione delle divergenze procede in modo più semplice e chiaro con il nostro metodo che con il metodo della « intermediate representation ».

5. — Conclusione e discussione.

Come si è detto nella introduzione il metodo qui usato è molto simile a quello introdotto da DYSON per la rinormalizzazione della matrice S e ne differisce soltanto in quanto fin dall'inizio è indipendente da ipotesi di analiticità sulle funzioni della carica in gioco.

Invero è presumibile per l'analogia con la teoria delle equazioni differenziali che il metodo « infinitesimale » proposto sia valido per classi di funzioni della carica molto più larghe di quelle rappresentabili da serie di potenze della carica stessa nell'intorno dell'origine (cfr. App. II), ed anche per funzioni che non siano analitiche in alcun punto del loro dominio di definizione.

Che sia importante svincolarsi dalle serie di potenze della carica, è già ovvio per il fatto che con tali serie non sono rappresentabili stati legati (cfr. I).

DYSON ha cercato di superare questa ovvia difficoltà con l'artificio della « intermediate representation », pensando che mentre le divergenze proprie delle teorie dei campi sono essenzialmente divergenza « ultraviolette »; le difficoltà relative alla presenza di eventuali stati legati fossero da ascrivere solo alle basse frequenze. Comunque, vi sono quasi certamente difficoltà più riposte e fondamentali. Il fatto stesso che la carica elettrica elementare possa assumere soltanto tre valori ($-e, 0, +e$) ne è il più probabile indizio. Anzi, questo fatto appare denunciare difficoltà a priori non attaccabili, nemmeno con il metodo qui proposto fondato sull'idea di una variazione continua della carica elettrica. Invero ci sarebbe da attendersi che l'indagine della esistenza

del limite del procedimento proposto in questo lavoro debba dare esito negativo, e che l'unico risultato positivo da aspettarsi da una tale indagine sia che lo spettro dei possibili valori della carica sia discreto ».

Si può tuttavia pensare di usare il metodo proposto in accoppiamento con un altro artificio, introducendo al posto delle effettive interazioni una interazione dipendente oltre che dalla carica, da un secondo parametro, diciamo β , che tenda alla effettiva interazione quando β tende, diciamo a β_0 . Allora, l'interazione fittizia potrebbe essere scelta in modo tale che per β diverso da β_0 il metodo proposto sia applicabile rigorosamente. Si tratterebbe poi di studiare cosa accade quando β tende a β_0 .

APPENDICE I.

Vogliamo esaminare alcune questioni relative all'operatore $\overset{!}{H}$ utili, tra l'altro per poter discuterne l'esistenza sotto certe ipotesi (cfr. Appendice II).

Vedremo precisamente come, supposto esistente e noto l'operatore $\overset{!}{H}$ per un certo valore λ della costante di accoppiamento, possa essere costruito $\overset{!}{H}$ per un valore λ' differente da λ infinitamente poco. Giova immediatamente notare, ed è importante tener presente, che, per ragioni di comodità noi supporremo che lo spettro degli autovalori di $H_0 + \lambda V$ sia discreto. Pertanto supporremo di porci in un *Hohlraum* finito che poi successivamente si potrà far tendere all'infinito. $\overset{!}{H}$ in questo caso può essere un operatore unitario anche quando vi siano stati legati (cfr. Appendice II). È ben noto invece che questo non è il caso (in generale) qualora si consideri fin dall'inizio un *Hohlraum* infinito ^(1a).

Cominciamo con il precisare alcune notazioni: indicheremo con $\overset{!}{H}(\lambda)$ il limite, supposto esistente, del prodotto cronologicamente ordinato $\Pi(1 - i\lambda V(t_i) \Delta t_i)$ ($h = 1$) esteso a una « suddivisione » dell'intervallo $t_1 - t_2$ in intervalli Δt_i , quando il massimo dei Δt_i tende a zero.

In modo analogo si definisce $\overset{!}{H}^+(\lambda)$ come il limite del prodotto $\Pi(1 + i\lambda V(t_i) \Delta t_i)$ ordinato in ordine cronologico inverso.

Si suppone non solo che l'operatore $\overset{!}{H}(\lambda)$ esista qualunque siano t_1 e t_2 , ma che sia unitario (ipotesi 1^a).

(1a) S. T. MA: *Phys. Rev.*, **87**, 652 (1952).

Pertanto

$$(IA.1) \quad \prod_{t_1}^{t_2}(\lambda) \prod_{t_1}^{t_2\dagger}(\lambda) = \prod_{t_1}^{t_2\dagger}(\lambda) \prod_{t_1}^{t_2}(\lambda) = 1.$$

Si suppone inoltre che, sotto l'ipotesi dell'accensione adiabatica della carica,

$$(IA.2) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \prod_t^{\bar{t}} = \prod_{-\infty}^{\bar{t}}$$

esista e sia unitario (ipotesi 2^a), e che inoltre l'operatore

$$(IA.3) \quad \mathcal{E}(\lambda) = \prod_{-\infty}^{\dagger}(\lambda)(H_0 + \lambda V) \prod_{-\infty}^{\dagger}(\lambda)$$

esista e abbia gli assi coincidenti con quelli di H_0 (ipotesi 3^a) (cfr. con l'osservazione precedente sulla supposta finitezza dello Hohlraum).

Si dia ora un incremento $\delta\lambda(t)$ a λ secondo la legge

$$\delta\lambda(t) = \Delta\lambda\chi(t),$$

dove $\chi(t)$ è una funzione continua, monotonamente crescente, nulla per $t \leq t_0$, e costantemente uguale a 1 per $t \geq t_1$ ($t_1 > t_0$); $\Delta\lambda$ si consideri infinitesimo.

Supponiamo che si possa scrivere per $t > t_1$

$$(IA.4) \quad \prod_{-\infty}^{\dagger}(\lambda + \Delta\lambda) = \prod_{-\infty}^{\dagger}(\lambda) - i \Delta\lambda \int_{t_0}^{\dagger} \chi(t') \prod_{t'}^{\dagger}(\lambda) V(t') \prod_{-\infty}^{\dagger} dt',$$

a meno di infinitesimi di ordine superiore in $\Delta\lambda$ (ipotesi 4^a). Vogliamo indagare, sotto le ipotesi 1^a, 2^a, 3^a e 4^a, cosa si può asserire degli operatori $\prod_{-\infty}^{\dagger}(\lambda + \Delta\lambda)$ e

$$(IA.5) \quad \mathcal{E}(\lambda + \Delta\lambda) = \prod_{-\infty}^{\dagger}(\lambda + \Delta\lambda)(H_0 + (\lambda + \Delta\lambda)V) \prod_{-\infty}^{\dagger}(\lambda + \Delta\lambda).$$

Posto (2^a)

$$(IA.6) \quad \mathcal{J} = \prod_{-\infty}^{\dagger}(\lambda) \int_{t_0}^{\dagger} \chi(t') \prod_{t'}^{\dagger}(\lambda) V(t') \prod_{t'}^{\dagger}(\lambda) dt' \prod_{-\infty}^{\dagger}(\lambda),$$

si verifica facilmente sul fondamento delle ipotesi fatte (facendo uso della relazione $\prod_{t_2}^{\dagger} \prod_{t_2}^{\dagger} = \prod_{t_2}^{\dagger}$ e di altre analoghe che si deducono facilmente ricordando

(2^a) Si noti che, come si può verificare senza difficoltà tenendo presenti le ipotesi, \mathcal{J} è hermitiano.

la definizione di $\overset{t_2}{\underset{t_1}{\Pi}}$ e tenendo presente la (IA.1), (IA.4) e (IA.5), che a meno di infinitesimi di ordine superiore,

$$(IA.7) \quad \mathcal{E}(\lambda + \Delta\lambda) = \mathcal{E}(\lambda) + i\Delta\lambda[\mathcal{J}, \mathcal{E}(\lambda)]_- + \Delta\lambda \overset{t}{\underset{-\infty}{\Pi}}^\dagger(\lambda) \underset{-\infty}{V} \overset{t}{\underset{-\infty}{\Pi}}(\lambda).$$

È utile ora notare che vale la identità

$$(IA.8) \quad \overset{t}{\underset{-\infty}{\Pi}}^\dagger(\lambda) \underset{-\infty}{V} \overset{t}{\underset{-\infty}{\Pi}}(\lambda) = \exp \left[i \int_{t_0}^t \mathcal{E}(\lambda) dt \right] \overset{t_0}{\underset{-\infty}{\Pi}}^\dagger \underset{-\infty}{V}(t_0) \overset{t_0}{\underset{-\infty}{\Pi}} \exp \left[-i \int_{t_0}^t \mathcal{E}(\lambda) dt \right].$$

Infatti, innanzitutto l'operatore $\exp \left[i \int_{t_0}^t \mathcal{E}(\lambda) dt \right]$ esiste in quanto per l'ipotesi 3^a $\mathcal{E}(\lambda)$ ha gli assi coincidenti con quelli di H_0 e pertanto gli operatori $\mathcal{E}(\lambda)$ a due tempi diversi commutano. Ciò non sarebbe vero dell'operatore $H_0 + \lambda \underset{-\infty}{V}$. Ciò notato la verifica della (IA.8) può procedere come segue: intanto

$$\begin{aligned} \lim_{t_1} \overset{t_2}{\underset{t_1}{\Pi}} (1 - i\lambda V(t')\Delta t') &= \lim \Pi \exp [iH_0 t'] (1 - i\lambda V\Delta t') \exp [-iH_0 t'] = \\ &= \exp [iH_0 t_2] \lim \Pi (1 - i\lambda V\Delta t') \exp [-iH_0 \Delta t'] \exp [-iH_0 t_1] = \\ &= \exp [iH_0 t_2] \lim \Pi \exp [-i(H_0 + \lambda V)\Delta t'] \exp [-iH_0 t_1]. \end{aligned}$$

(Si noti che $H_0 + \lambda V$ è indipendente da t).

D'altra parte

$$\begin{aligned} \overset{t}{\underset{-\infty}{\Pi}}^\dagger \underset{-\infty}{V}(t) \overset{t}{\underset{-\infty}{\Pi}} &= \overset{t}{\underset{-\infty}{\Pi}}^\dagger \exp [iH_0(t-t_0)] \underset{-\infty}{V}(t_0) \exp [-iH_0(t-t_0)] \overset{t}{\underset{-\infty}{\Pi}} = \\ &= \overset{t}{\underset{-\infty}{\Pi}}^\dagger \exp [iH_0(t-t_0)] \overset{t_0}{\underset{-\infty}{\Pi}} \overset{t_0}{\underset{-\infty}{\Pi}}^\dagger \underset{-\infty}{V}(t_0) \overset{t_0}{\underset{-\infty}{\Pi}} \overset{t_0}{\underset{-\infty}{\Pi}}^\dagger \exp [-iH_0(t-t_0)] \overset{t}{\underset{-\infty}{\Pi}}. \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} \overset{t_0}{\underset{-\infty}{\Pi}}^\dagger \exp [-iH_0(t-t_0)] \overset{t}{\underset{-\infty}{\Pi}} &= \overset{t_0}{\underset{-\infty}{\Pi}}^\dagger \exp [-iH_0(t-t_0)] \overset{t}{\underset{t_0}{\Pi}} \overset{t_0}{\underset{-\infty}{\Pi}} = \\ &= \overset{t_0}{\underset{-\infty}{\Pi}}^\dagger \exp [iH_0 t_0] \lim_{t_0} \overset{t}{\underset{t_0}{\Pi}} \exp [-i(H_0 + \lambda V)\Delta t] \cdot \exp [-iH_0 t_0] \overset{t_0}{\underset{-\infty}{\Pi}} = \\ &= \overset{t_0}{\underset{-\infty}{\Pi}}^\dagger \lim_{t_0} \overset{t}{\underset{t_0}{\Pi}} \exp [-i(H_0 + \lambda V(t_0))\Delta t] \overset{t_0}{\underset{-\infty}{\Pi}}. \end{aligned}$$

Ricordando ora la (IA.3) e la ipotesi 3^a, segue immediatamente la (IA.8).

Da (IA.6) e (IA.8) si ricava per gli elementi matrice di \mathcal{J} (se con a e b si

indicano due assi di H_0 e quindi di $\mathcal{E}(\lambda)$)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{a,b} &= \left(\int_{t_0}^t \exp[i\mathcal{E}(t'-t)] \underline{\dot{H}}_{-\infty}^{\dagger} V(t) \underline{\dot{H}}_{-\infty} \right) \exp[-i\mathcal{E}(t'-t)] (\chi(t') dt')_{a,b} = \\ &= \left(\underline{\dot{H}}_{-\infty}^{\dagger} V(t) \underline{\dot{H}}_{-\infty} \right)_{a,b} \int_{t_0}^t \exp[i(\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b)(t'-t)] \chi(t') dt', \end{aligned}$$

dove \mathcal{E}_a e \mathcal{E}_b sono gli autovalori di $\mathcal{E}(\lambda)$ corrispondenti agli assi di a e b .

Ora, se si suppone l'intervallo $t-t_0$ molto grande, e se si suppone $\chi(t')$ « adiabaticamente variabile », a meno di termini dell'ordine relativo di

$$\frac{1}{(t-t_0)(\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b)},$$

si può scrivere.

$$\int_{t_0}^t \exp[i(\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b)(t'-t)] \chi(t') dt' = \frac{1}{i(\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b)} \quad \text{per } \mathcal{E}_a \neq \mathcal{E}_b,$$

mentre l'integrale che compare al primo membro rimane dell'ordine di $t-t_0$, per $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_b$.

Segue che, essendo

$$[\mathcal{J}, \mathcal{E}(\lambda)]_{-a,b} = \mathcal{J}_{a,b}(\mathcal{E}_b - \mathcal{E}_a),$$

al limite per $t-t_0$ tendente all'infinito si ha

$$(IA.9) \quad [\mathcal{J}, \mathcal{E}(\lambda)]_{-a,b} = \begin{cases} - \left(\underline{\dot{H}}_{-\infty}^{\dagger} V(t) \underline{\dot{H}}_{-\infty} \right)_{a,b} & \text{per } \mathcal{E}_a \neq \mathcal{E}_b \\ 0 & \text{per } \mathcal{E}_a = \mathcal{E}_b. \end{cases}$$

Ricordando ora la (IA.7), e supponendo per semplicità che $\mathcal{E}(\lambda)$ non sia degenerare (questa non è una restrizione essenziale, quindi non è elencata tra le ipotesi), si ricava che anche $\mathcal{E}(\lambda + \Delta\lambda)$ è diagonale insieme ad H_0 , ed è dato da

$$(IA.10) \quad \mathcal{E}(\lambda + \Delta\lambda) = \mathcal{E}(\lambda) + \Delta\lambda \left(\underline{\dot{H}}_{-\infty}^{\dagger}(\lambda) \underline{V}(t) \underline{\dot{H}}_{-\infty}(\lambda) \right)_{\text{diag.}},$$

dove con $\left(\underline{\dot{H}}_{-\infty}^{\dagger}(\lambda) \underline{V}(t) \underline{\dot{H}}_{-\infty}(\lambda) \right)_{\text{diag.}}$ si è indicato l'operatore che nella rappresentazione in cui H_0 è diagonale, ha elementi matrici diagonali uguali a quelli di $\underline{\dot{H}}_{-\infty}^{\dagger}(\lambda) \underline{V}(t) \underline{\dot{H}}_{-\infty}(\lambda)$, ed elementi non diagonali nulli.

La (IA.10) vale naturalmente a meno di termini infinitesimi di ordine superiore con $\Delta\lambda$, o infinitesimi dello stesso ordine di $\Delta\lambda/(t-t_0)$, t_0 essendo il tempo iniziale che compare nella (IA.4).

Ci resta ora da vedere come più convenientemente si possa scrivere la (IA.4). Tenendo presente la (IA.8), la (IA.4) si trasforma agevolmente nella

$$\begin{aligned} \frac{t}{-\infty}^{\dagger}(\lambda) \left(\frac{t}{-\infty}^{\dagger}(\lambda + \Delta\lambda) - \frac{t}{-\infty}^{\dagger}(\lambda) \right) &= -i\Delta\lambda \int_{t_0}^t \frac{t'}{-\infty}^{\dagger} V(t') \frac{t'}{-\infty}^{\dagger} \chi(t') dt' = \\ &= -i\Delta\lambda \int_{t_0}^t \exp[i\mathcal{E}(\lambda)(t'-t)] \frac{t}{-\infty}^{\dagger}(\lambda) V(t) \frac{t}{-\infty}^{\dagger}(\lambda) \exp[-i\mathcal{E}(\lambda)(t'-t)] \chi(t') dt', \end{aligned}$$

che può anche essere scritta in forma simbolica nel modo seguente:

$$(IA.11) \quad \frac{t}{-\infty}^{\dagger} \frac{\delta \Pi}{\delta \lambda} = i \int_{-\infty}^t \exp[i\mathcal{E}(\lambda)(t'-t)] \frac{t}{-\infty}^{\dagger} V(t) \frac{t}{-\infty}^{\dagger} \exp[-i\mathcal{E}(\lambda)(t'-t)] \chi(t') dt'.$$

In tale maniera si mette esplicitamente in evidenza la forma della dipendenza dal tempo dell'integrando.

La (IA.10) e la (IA.11) sono già state date in un lavoro precedente ⁽³⁾.

Riassumendo i risultati di questo paragrafo, possiamo affermare che abbiamo dimostrato sotto certe ipotesi che se l'operatore $\frac{t}{-\infty}^{\dagger}(\lambda)$ esiste ed è unitario, e se $\mathcal{E}(\lambda)$ è diagonale con H_0 per un certo valore di λ , anche $\mathcal{E}(\lambda + \Delta\lambda)$ con $\Delta\lambda$ infinitesimo, esiste ed è diagonale con H_0 . Abbiamo inoltre scritto una equazione operatoriale differenziale alla quale l'operatore $\frac{t}{-\infty}^{\dagger}(\lambda)$ soddisfa in quanto funzione di λ che può essere utile, come vedremo in Appendice II, nella discussione delle condizioni di esistenza dell'operatore $\frac{t}{-\infty}^{\dagger}(\lambda)$ stesso.

Voglio ora sottolineare che $\frac{t}{-\infty}^{\dagger}(\lambda)$ secondo le definizioni e le ipotesi è sostanzialmente l'operatore unitario generante la trasformazione canonica che fa passare dalla rappresentazione di interazione a quella di Heisenberg. Precisamente, come si rileva dalla (IA.8) e dalla supposta diagonalità di $\mathcal{E}(\lambda)$, se A è un operatore qualunque nella rappresentazione di interazione, l'elemento matrice $(\Pi^{\dagger} A \Pi)_{a,b}$ (nella rappresentazione in cui H_0 è diagonale) è identico all'elemento di matrice dell'operatore A nella rappresentazione di Heisenberg, relativa ai due assi che corrispondono secondo la trasformazione unitaria di generatrice $\frac{t}{-\infty}^{\dagger}(\lambda)$, agli assi di H_0 , contraddistinti da a e b . Di questa circostanza abbiamo già fatto uso nel § 2 del testo.

APPENDICE II.

Vogliamo discutere la questione della esistenza dell'operatore $\hat{\Pi}$ definito in I ed Appendice I, sotto certe ipotesi sulle interazioni V che preciseremo. Queste ipotesi in realtà sono più restrittive di quelle a cui le interazioni convenzionali delle teorie dei campi soddisfano. Tuttavia le presenti considerazioni possono essere utili in vista del procedimento di limite accennato nella discussione di questo lavoro.

Ci fonderemo essenzialmente su concetti esposti in un precedente lavoro ^(3A) e che indicheremo con A, al quale rimandiamo per le definizioni.

Noi dobbiamo discutere l'esistenza di una soluzione dell'equazione (IA.11). Allo scopo poniamo

$$(IIA.1) \quad \hat{\Pi}(\lambda) = Q(\lambda) \exp \left[-i \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(\lambda) dt' \right]$$

(per la commutabilità di $\mathcal{E}(\lambda)$ a due tempi diversi, l'operatore

$$\exp \left[-i \int_{\infty}^t \mathcal{E}(\lambda) dt' \right]$$

è definito senza equivoco, cfr. Appendice I).

Tenuta presente la posizione

$$\delta\lambda(t) = \Delta\lambda\chi(t),$$

si ha

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(\lambda) dt' = \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda} \chi(t') dt',$$

e conseguentemente

$$\hat{\Pi}^+ \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \lambda} = \exp \left[i \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(\lambda) dt' \right] Q_{\lambda}^+ \frac{\partial Q}{\partial \lambda} \exp \left[-i \int_{\infty}^t \mathcal{E}(\lambda) dt' \right] + \int_{\infty}^t \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda} \chi(t') dt'.$$

La (IA.11) si trasforma pertanto nella

$$(IIA.2) \quad Q_{\lambda}^+ \frac{\partial Q}{\partial \lambda} = -i \exp \left[-i \int_{\infty}^t \mathcal{E} dt' \right] \exp \left[i \int_{\infty}^t \mathcal{E} dt' \right] \left(Q^{-1}(\lambda) V Q(\lambda) - \frac{\partial \mathcal{E}(\lambda)}{\partial \lambda} \right) \cdot \\ \cdot \exp \left[-i \int_{\infty}^{t'} \mathcal{E}(\lambda) dt'' \right] \chi(t') dt' \exp \left[i \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(\lambda) dt' \right].$$

^(3A) B. FERRETTI: *Rend. Lincei*, **12**, 473 (1952).

La posizione (IIA.1) elimina dei fattori di fase infiniti (cfr. anche I) che darebbero luogo, quando $\chi(t')$ tende a 1 per ogni $t' < t$, a termini diagonali infiniti nel secondo membro della (IA.11). Questi termini, tenuta presente la (IA.10) non sussistono più al secondo membro della (IIA.2).

Vogliamo ora in analogia a quanto dimostrato in A, mostrare che, ammesso di conoscere la soluzione di (IIA.2) per $\lambda = \lambda_0$ sotto l'ipotesi

i) che V sia limitato (cfr. A) e

i') che, essendo lo spettro di $\mathcal{E}(\lambda_0)$ discreto ed $\mathcal{E}_a(\lambda_0)$ e $\mathcal{E}_b(\lambda_0)$ due valori distinti qualunque di $\mathcal{E}(\lambda_0)$, l'insieme $1/|\mathcal{E}_a(\lambda_0) - \mathcal{E}_b(\lambda_0)|$ sia limitato superiormente, possiamo costruire mediante il procedimento ricorrente definito dalle equazioni

$$\begin{aligned} \text{(IIA.2-bis)} \quad Q_n^{-1}(\lambda) \frac{\delta Q_n}{\delta \lambda} = \\ = -i \int_{-\infty}^t \exp \left[-i \int_{t'}^t \mathcal{E}_{n-1} dt'' \right] \left(Q_{n-1}^{-1} V Q_{n-1} - \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}}{\partial \lambda} \right) \exp \left[i \int_{t'}^t \mathcal{E}_{n-1} dt'' \right] \chi(t') dt' \\ Q_0 = Q(\lambda_0), \end{aligned}$$

una soluzione

$$Q(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(\lambda),$$

per $\lambda - \lambda_0 \leq \Delta\lambda$, $\Delta\lambda$ essendo una certa quantità finita maggiore di zero.

Cominciamo con il notare che se Q_{n-1} è unitario, Q_n se esiste è unitario. Infatti l'equazione (IIA.2-bis) diviene della forma

$$\text{(IIA.2-ter)} \quad Q_n^{-1}(\lambda) \frac{\delta Q_n}{\delta \lambda} = -i C_{n-1}(\lambda),$$

dove $C_{n-1}(\lambda)$ è un operatore hermitiano noto. Se $C_{n-1}(\lambda)$ è limitato la (IIA.2-ter) ammette senz'altro soluzione, che può essere espressa mediante la serie:

$$\begin{aligned} \text{(IIA.2-quater)} \quad Q_n = Q(\lambda_0) \left\{ 1 - i \int_{\lambda_0}^{\lambda} C_{n-1}(\lambda_1) d\lambda_1 + \right. \\ \left. + (-i)^2 \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda_1 \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda_2 C_{n-1}(\lambda_2) C_{n-1}(\lambda_1) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

La serie chiaramente converge, se $C(\lambda)$ è limitato nell'intervallo $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0 + \Delta\lambda$. La verifica si può condurre sulla falsariga della dimostrazione del teorema dato in A. Q_n è allora unitario.

Resta dunque da dimostrare sotto l'ipotesi i) ed i') che:

a) $C_{n-1}(\lambda)$ è limitato qualunque sia n in un intervallo $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0 + \Delta\lambda$, $\Delta\lambda$ essendo indipendente da n .

b) che la successione Q_n tende a un limite soluzione della (IIA.2).

Premettiamo alcuni lemmi.

1) Siano $A_1^{(n)} \dots A_s^{(n)} \dots$ operatori limitati per ogni s ed n ; sia inoltre l'insieme dei limiti superiori degli $A_s^{(n)}$ limitato, ed L il massimo limite dell'insieme.

Si diano agli $A_s^{(n)}$ degli incrementi limitati $\Delta A_s^{(n)}$ e sia ΔL il massimo limite dell'insieme dei limiti superiori dei $\Delta A_s^{(n)}$. Dico che se:

$$F = \sum_n c_n \prod_{s=1}^{m_n} A_s^{(n)},$$

$$\Delta F = \sum_n c_n \prod_{s=1}^{m_n} (A_s^{(n)} + \Delta A_s^{(n)}) - F,$$

e se la serie

$$\sum |c_n| \{ (L + \Delta L)^{m_n} - L^{m_n} \},$$

è convergente, si ha

$$L(\Delta F) \leq \sum |c_n| \{ (L + \Delta L)^{m_n} - L^{m_n} \}.$$

(La verifica di questo lemma si eseguisce con i criteri usati in A).

Dal lemma precedente segue immediatamente che se $Q(C, \lambda)$ è soluzione di una equazione del tipo (IIA.2-bis), e se $Q + \Delta Q = Q(C + \Delta C, \lambda)$, se inoltre per ogni λ compreso tra λ_0 e $\lambda_0 + \Delta \lambda$

$$L(C) \leq L,$$

$$L(\Delta C) \leq \Delta L,$$

e se infine $Q(\lambda_0) = 1$ (cosa che non riduce la generalità), si ha

$$L(\Delta Q) \leq \Delta \lambda \Delta L \exp [\Delta \lambda (L + \Delta L)].$$

2) Si consideri l'espressione:

$$K = \int_{-\infty}^0 \exp[i\mathcal{E}t'] (\underline{V} - \underline{V}_{\text{diag}}) \exp[-i\mathcal{E}t'] \chi(t') dt'.$$

Dico che, se l'operatore \mathcal{E} soddisfa l'ipotesi

$$\frac{1}{|\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b|} \leq M,$$

qualunque siano a e b , se \underline{V} è limitato e se $L(V) = V_0$, K è limitato e $L(K) \leq 8V_0M$.

Dimostrazione: poniamo

$$W = \underline{V} - \underline{V}_{\text{diag}},$$

intanto $L(W) \leq 2V_0$ e $W_{\text{diag}} = 0$.

Ciò notato, sia φ_r un generico asse di \mathcal{E} (e di H_0). Ogni ψ normalizzato a 1 si può porre nella forma

$$\psi = \sum c_r \varphi_r,$$

con $\sum |c_r|^2 = 1$.

Sia $|W_{m, \bar{n}_m} c_{\bar{n}_m}|$ uguale al massimo dei valori assoluti di $W_{mn} c_n$. Voglio dimostrare che sotto la condizione $\sum |c_n|^2 = 1$, $\sum_m |W_{m, \bar{n}_m} c_{\bar{n}_m}|^2$ è convergente.

Infatti se lo è, lo è indipendentemente dall'ordine. Allora la somma della serie è data da

$$c_1^2 \sum_{m_1} |W_{m_1, 1}|^2 + \dots + |c_r|^2 \sum_{m_r} |W_{m_r, r}|^2 + \dots,$$

dove m_r è un indice tale che \bar{n}_{m_r} è uguale ad r .

Ma

$$\sum_{m_r} |W_{m_r, r}|^2 \leq \sum_m |W_{m, r}|^2 \leq (L(W))^2 = 4V_0^2.$$

Segue che la detta somma è veramente convergente, ed è $< 4V_0^2$.

Si consideri ora

$$K(\alpha) = \int_{-\infty}^0 \exp[i\mathcal{E}t'] W \exp[-i\mathcal{E}t'] \exp[\alpha t'] dt',$$

con α positivo. $K(\alpha)$ è chiaramente limitato, ed è

$$L(K(\alpha)) \leq \frac{2V_0}{\alpha}.$$

Voglio dimostrare che $K - K(\alpha)$ è limitato.

Infatti, dato $\psi = \sum_r c_r \varphi_r$

$$\begin{aligned} (K - K(\alpha))\psi &= \sum_m \varphi_m \sum_n W_{m,n} \left| \frac{1}{i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n)} - \frac{1}{\alpha + i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n)} \right| c_n = \\ &= \alpha \sum_m \varphi_m \sum_n \frac{W_{m,n} c_n}{[\alpha + i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n)] i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n)}. \end{aligned}$$

Ricordando che $K_{nn} = 0$ notiamo che

$$\left| \sum_n \frac{W_{m,n} c_n}{[\alpha + i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n)] i(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n)} \right| < |W_{m, \bar{n}_m} c_{\bar{n}_m}| \sum_{n \neq m} \frac{1}{(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n)^2}.$$

Ma

$$\sum_{n \neq m} \frac{1}{(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n)^2} < M^2 \sum_{n \neq m} \frac{1}{(m - n)^2} < 2M^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 4M^2;$$

segue

$$\left| \sum_n \frac{W_{mn} c_n}{[\alpha + i(\epsilon_m - \epsilon_n)] i(\epsilon_m - \epsilon_n)} \right|^2 < 16 M^4 |W_{m, \bar{n}_m} c_{\bar{n}_m}|^2.$$

Ma poichè come abbiamo dimostrato

$$\sum_m |W_{m, \bar{n}_m} c_{\bar{n}_m}|^2 \leq 4 V_0^2,$$

segue

$$L(K - K(\alpha)) < 8\alpha V_0 M^2.$$

Segue anche

$$L(K) < 2V_0 \left(\frac{1}{\alpha} + 4\alpha M^2 \right),$$

minimizzando ora rispetto ad α si ha

$$L(K) < 8V_0 M,$$

c. d. d.

Ora, si osservi che, se S è unitario,

$$L(S \underline{V} S^{-1}) = L(\underline{V}) = V_0.$$

Supponiamo di aver dimostrato che $Q_{n-1}(\lambda)$ esiste ed è unitario in un certo intervallo. Allora:

$$\epsilon_{n-1}(\lambda) = \epsilon(\lambda_0) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} (Q_{n-1}^{-1} \underline{V} Q_{n-1})_{\text{diag}} d\lambda;$$

segue che se

$$\left| \overline{\epsilon_a(\lambda_0) - \epsilon_b(\lambda_0)} \right| \leq \frac{M}{2},$$

e se

$$(IIA.3) \quad (\lambda - \lambda_0) V_0 \leq \frac{1}{2M},$$

si ha

$$\left| \overline{\epsilon_{n-1,a}(\lambda) - \epsilon_{n-1,b}(\lambda)} \right| \leq M.$$

Si deduce pertanto dal lemma 2) che abbiamo dimostrato e dalla (IIA.2) che $Q_n(\lambda)$ esiste ed è unitario nell'intervallo definito dalla (IIA.3).

Quindi, per induzione completa segue che $Q_n(\lambda)$ esiste qualunque sia n

ed è unitario nell'intervallo definito dalla (IIA.3). Si noti che detto intervallo è indipendente da n . Il punto a) è quindi completamente dimostrato.

Vediamo di dimostrare il punto b). Consideriamo allo scopo

$$L(\Delta Q_n) = L(Q_n - Q_{n-1}).$$

Per il lemma 1) vale la disuguaglianza:

$$L(\Delta Q_n) \leq \Delta \lambda \Delta L_n \exp [\Delta \lambda (L_n + \Delta L_n)],$$

dove ΔL_n è il massimo nell'intervallo $\lambda_0 - \lambda_0 + \Delta \lambda$ dei limiti superiori

$$L(C_{n-1} - C_{n-2}).$$

Ora posto

$$W_m = Q_m^{-1} V Q_m - (Q_m^{-1} V Q_m)_{\text{diag}}$$

e indicato con $L(\Delta W_m)$ il massimo dei limiti superiori in $\lambda_0 - \lambda_0 + \Delta \lambda$ di $W_m - W_{m-1}$ si dimostra in modo perfettamente identico a quello usato per il lemma 2) che

$$\Delta L_n < 4M\bar{L}(\Delta W_{n-1}).$$

Ma come si verifica facilmente W_m pensato come funzione di Q_m è a rapporto incrementale L limitato (cfr. A).

Esiste quindi un numero R tale che

$$\bar{L}(\Delta W_{n-1}) < RL(Q_{n-1}).$$

Segue

$$L(\Delta Q_n) < \Delta \lambda R \exp [\Delta \lambda \cdot 24V_0 M] L(\Delta Q_{n-1}).$$

Basta dunque scegliere $\Delta \lambda$ in modo che soddisfi alla (IIA.3) e alla

$$(IIA.3-bis) \quad \Delta \lambda R \exp [24\Delta \lambda V_0 M] < 1,$$

perchè la successione dei Q_n abbia un limite che per il modo con cui è costruito soddisfa alla (IIA.2) (cfr. A). Il teorema è dunque completamente dimostrato.

Naturalmente le condizioni (IIA.3) e (IIA.3-bis) sono sufficienti e non necessarie, e in generale esse sono eccessivamente restrittive. Quando esse sono soddisfatte, anche uno sviluppo perturbativo con raggio $\Delta \lambda$ nell'intorno di λ_0 può convergere.

Vogliamo ora invece dare un esempio semplice benchè artificioso e banale, per cui il procedimento ricorrente definito dalla (IIA.2-bis) è convergente per valori di λ per cui la teoria perturbativa diverge.

Si consideri il problema relativo alla hamiltoniana $H_0 + \lambda V$, H_0 con autovalori $E_1^0 \dots E_n^0 \dots$ tutti distinti, e V definiti dai seguenti elementi matrice:

$$V_{11} = w,$$

$$V_{12} = V_{21} = v,$$

tutti gli altri essendo nulli.

Posto

$$V^{(n)} = Q_n^{-1} V Q_n,$$

e

$$C_{a,b}^{(n)} = V_{a,b}^{(n)} (1 - \delta_{ab}) / i(\epsilon_a^{(n)} - \epsilon_b^{(n)})$$

le equazioni ricorrenti sono

$$Q_n^{-1} \frac{\delta Q_n}{\delta \lambda} = -i C^{(n-1)},$$

ammettenti la soluzione (IIA.2-*quater*).

Ora, è facile vedere, tenendo appunto presenti la (IIA.2-*quater*) e la (IIA.4) che gli unici elementi di matrice differenti da zero di $Q^{(1)}$ sono:

$$Q_{11}^{(1)} = Q_{22}^{(1)} = \cos \frac{v\lambda}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}},$$

e

$$Q_{12}^{(1)} = -Q_{21}^{(1)} = -\sin \frac{v\lambda}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}.$$

Segue allora analogamente che gli unici elementi di matrice differenti da zero di $V^{(1)}$ sono $V_{11}^{(1)}$, $V_{22}^{(1)}$, $V_{12}^{(1)}$, $V_{21}^{(1)}$.

Applicando allora il principio di induzione completa e un ragionamento analogo a quello impiegato per giungere al presente risultato, si conclude che questa proprietà vale per $V^{(n)}$ con n qualsivoglia.

Si può allora dimostrare che se r per un dato λ è sufficientemente piccolo e positivo, e se w è pure positivo, la successione $V_{12}^{(2n+1)} = V_{21}^{(2n+1)}$ è crescente, mentre la successione $V_{12}^{(2n)} = V_{21}^{(2n)}$ è decrescente. Inoltre la differenza $V_{12}^{(2n-1)} - V_{12}^{(2n-1)}$ tende a zero per n tendente all'infinito.

Segue immediatamente che $V_{12}^{(n)} = V_{21}^{(n)}$ tende a un limite finito quando n tende all'infinito.

Dimostrato ciò si può allora dimostrare facilmente che anche $V_{11}^{(n)}$ e $V_{22}^{(n)}$ tendono a un limite per n tendente all'infinito, e quindi che la successione $V^{(n)}$ tende a un limite per λ qualunque, purchè r sia sufficientemente piccolo (in dipendenza dal valore di λ).

D'altra parte se si pone $V = V' + V''$, dove $V'_{11} = v$, e tutti gli altri elementi matrici di V' sono nulli, e se si assume come hamiltoniana imperturbata invece di H_0 , $H'_0 = \lambda V'$, supponendo r così piccolo che termini in r^2 siano trascurabili, si può risolvere perturbativamente il nostro problema senza alcuna difficoltà.

Si trova allora

$$Q_{12} = -Q_{21} = -\frac{v\lambda}{E_1 - E_2 + \lambda v} + O(v^2),$$

e

$$V_{12} = v \left(1 - \frac{w\lambda}{E_1 - E_2 + w\lambda} \right) + O(v^2).$$

Si può verificare senza difficoltà che questa soluzione, esatta a meno di termini $O(v^2)$ coincide a meno di termini $O(v^2)$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} V_{12}^{(n)}$.

Si noti che la soluzione ottenuta con il nostro procedimento è ricavata a partire da H_0 e non da H'_0 come hamiltoniana imperturbata. Ora, se λw fosse maggiore $E_2^0 - E_1^0$, ciò sarebbe impossibile con la teoria perturbativa perchè $1/(E_1^0 - E_2^0 + w\lambda)$ non sarebbe sviluppabile in serie di potenze di λ .

Pertanto lo sviluppo perturbativo a partire da H_0 come hamiltoniana imperturbata, a differenza del nostro, divergerebbe.

Come si è detto, l'esempio è banale. Cionondimeno serve a provare che il procedimento espresso dalle equazioni ricorrenti (IIA.2-bis) non si riduce a un procedimento perturbativo.

APPENDICE III.

A proposito della equivalenza tra le rappresentazioni β e β' del § 2 di un operatore qualunque, si consideri per fissare le idee, il caso in cui, sia nello stato «bra» che nello stato «kett» abbiamo soltanto due fermioni (non anti-fermioni) $k_1\sigma_1$, $k_2\sigma_2$ e $k'_1\sigma'_1$ e $k'_2\sigma'_2$ rispettivamente. (σ_1 , ecc., sono gli indici spinoriali, questa volta esplicitamente indicati).

Noi dovremo allora confrontare l'operatore

$$(0) \quad \sum \langle k_1\sigma_1, k_2\sigma_2 | k'_1\sigma'_1, k'_2\sigma'_2 \rangle a_{k_1}^- a_{k_2}^- a_{k'_1}^+ a_{k'_2}^+,$$

e l'operatore

$$(00) \quad \int \dots \int dx_1 \dots dx_4 f(\sigma_1 x_1, \sigma_2 x_2, \sigma'_1 x_3, \sigma'_2 x_4) \cdot \bar{\psi}_{\sigma_1}^+(x_1), \bar{\psi}_{\sigma_2}^+(x_2) \psi_{\sigma'_1}^+(x_3) \psi_{\sigma'_2}^+(x_4).$$

Ora, possiamo scrivere, per esempio,

$$\bar{\psi}_{\sigma'_1}^+(x_3) = \int dk_0 \sum_k a_k^+ u_{k\sigma'_1} \exp[ikx_3] \delta(k_0 - \sqrt{\kappa_0^2 + k^2}),$$

dove κ_0 è l'inverso della lunghezza d'onda Compton del fermione considerato, $u_{k\sigma'_1}$ uno spinore costante, k la parte spaziale di \underline{k} .

Segue allora per confronto tra (0) e (00)

$$\begin{aligned} (000) \quad & \langle k_1\sigma_1, k_2\sigma_2 | k'_1\sigma'_1, k'_2\sigma'_2 \rangle = \\ & = \bar{u}_{k_1\sigma_1}^+ \dots u_{k'_2\sigma'_2}^+ \delta(k_{01} - \sqrt{\kappa^2 + k_1^2}) \dots \delta(k'_{02} - \sqrt{\kappa_0^2 + k_2'^2}) \cdot \\ & \cdot \int \dots \int dx_1 \dots dx_4 f(x_1\sigma_1 \dots x_4\sigma'_4) \exp[i(k'_1 x_3 + k'_2 x_4 - k_1 x_1 - k_2 x_2)], \end{aligned}$$

relazione che lega le due rappresentazioni mediante una trasformazione di Fourier.

Si noti che scrivendo la (000) abbiamo inteso che il segno di sommatoria in (0) rappresenti anche una quadruplicata integrazione rispetto a tutti i possibili valori di $k_{0,1} \dots k_{0,2}$.

Questo procedimento si generalizza ovviamente, *mutatis mutandis*, al caso in cui si abbiano da considerare numeri qualunque di fermioni, antifermioni e bosoni.

Naturalmente se l'operatore che si considera dipende da qualche parametro (ad esempio le coordinate \underline{x} di un punto nello spazio-tempo), anche la f dipenderà da quel parametro.

È importante benchè ovvio notare che se l'operatore, ad esempio, dipende dal tempo, tale dipendenza non sarà necessariamente quella che si avrebbe nella rappresentazione di interazione, nonostante che operatori come \underline{q} siano operatori della rappresentazione di interazione; ciò potrà appunto avvenire perchè f dipenderà esplicitamente dal tempo, mentre la dipendenza da $\underline{x}_1 \dots \underline{x}_N$ non apparirà più a integrazione avvenuta.

Resta da osservarsi che la (000), mentre determina in modo univoco $k_1 \dots k'_1 \dots$ data la f , non determina in modo altrettanto univoco la f dato $\underline{k}_1 \dots \underline{k}'_1 \dots$ per la presenza a destra di fattori come $\delta(k_{0,1} - \sqrt{\kappa_0^2 - \mathbf{k}_1^2})$.

Infatti due funzioni f che differiscono per una f' la cui trasformata di Fourier sia nulla, per esempio, quando $k_{0,1} = \sqrt{\kappa_0^2 - \mathbf{k}_1^2}$, possono entrambi soddisfare la (000) per un dato $\langle \underline{k}_1 \dots | \underline{k}'_1 \dots \rangle$.

Ciò è da tener presente per quanto riguarda il calcolo degli incrementi degli operatori nella rappresentazione di Feynmann.

Per rendersene conto, si consideri, ad esempio,

$$\int f'(x_1, x_2) \underline{N}_x(\underline{\bar{\psi}}(x) | \psi(x_1) \psi(x_2)) d\underline{x}_1 d\underline{x}_2,$$

supponendo che la trasformata di Fourier della f' rispetto alla variabile \underline{x}_1 , sia appunto nulla per $k_0 = \sqrt{\kappa_0^2 - \mathbf{k}^2}$. Allora, se si accoppia $\underline{\bar{\psi}}(x)$ con $\underline{\psi}(x_2)$, l'integrale precedente rispetto a \underline{x}_1 è senz'altro nullo perchè $\underline{\psi}(x_1)$ resta « libero ».

Ma si accoppi $\underline{\psi}(x)$ con $\underline{\psi}(x_1)$: avremo da considerare un integrale del tipo:

$$\int f'(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \mathcal{S}_F(\underline{x} - \underline{x}_1) d\underline{x}_1,$$

il quale potrà essere valutato usando appunto le trasformate di Fourier dell'integrando. Si può scorgere allora immediatamente che tale integrale in generale non si annullerà per ogni valore di \underline{x} . È necessario in conseguenza, per poter condurre correttamente il calcolo indicato nel § 2, scegliere fra tutte le rappresentazioni (β') equivalenti alla (β) la rappresentazione « appropriata ».

Ora, nel § 2 stesso, è indicata quale è questa rappresentazione « appropriata »: è quella risultante dalla decomposizione degli operatori in gioco nei loro costituenti normali.

A questo punto è importante notare che con l'applicazione del lemma del § 2 nell'espressione degli incrementi degli operatori nella rappresentazione di Feynmann, si ottengono proprio gli operatori di tipo \mathcal{Q}_2 già decomposti nella somma dei loro costituenti normali; pertanto si ha non solo una rappresen-

tazione corretta, ma « appropriata » alla ulteriore applicazione della nostra regola di calcolo.

Ciò non è modificato nemmeno dal procedimento di rinormalizzazione, dato che questo formalmente consiste nell'aggiunta di opportuni termini alla interazione, che vanno esattamente trattati come tutti gli altri.

Pare quindi che sotto questo aspetto almeno il procedimento indicato sia internamente coerente.

APPENDICE IV.

Il metodo di separazione delle divergenze del § 3 è fondato su alcune proprietà topologiche dei grafici di Feynmann, ovvie quando tali grafici ammettono un numero limitato di vertici, non più tali quando il numero dei vertici non è più limitato.

Poichè il passaggio al limite per un certo numero infinito di incrementi infinitesimi della carica elettrica che dovrebbe alla fine compiersi con il metodo proposto nel presente lavoro, implica precisamente la considerazione di grafici aventi un numero non limitato di vertici, è opportuno far vedere come le proprietà topologiche di cui si è fatto uso nel § 3 sussistono anche quando il numero dei vertici non è limitato.

Considereremo insiemi di vertici V e insiemi di linee L definiti dalle seguenti proprietà:

a ogni vertice corrispondono tre linee determinate;

a ogni linea corrispondono due vertici o un vertice determinato: se un vertice, la linea dicesi esterna.

Se una linea \bar{L} corrisponde a un vertice \bar{V} , V corrisponde a \bar{L} e viceversa. In tal caso si dice che si appartengono.

Se due vertici V_1 e V_2 appartengono alla stessa linea, si dicono connessi.

Siano due insiemi, I_1 e I_2 di vertici, non aventi elementi in comune. Se esiste almeno un elemento del primo insieme V_1 , e almeno un elemento del secondo V_2 che siano tra di loro connessi, si dice che I_1 e I_2 sono « reciprocamente connessi ».

Se L appartiene a V_1 e V_2 , si chiama allora linea di connessione di I_1 e I_2 .

Due insiemi I_1 e I_2 si dicono semplicemente, doppiamente, ..., n -mente connessi tra di loro, se esistono rispettivamente uno, due, ..., n linee di connessione tra I_1 e I_2 , e uno, due, ..., n soltanto.

Un insieme I di vertici si dice « in sè connesso » o « connesso » se non è possibile trovare un sottoinsieme I_1 non vuoto e non identico ad I , di I , che non sia reciprocamente connesso con $I - I_1$.

Un insieme I si dice « semplicemente connesso » se è connesso, e se è possibile trovare un sottoinsieme I_1 di I semplicemente connesso con $I - I_1$.

Un insieme I si dice « doppiamente connesso », se è connesso, se non è semplicemente connesso, ed infine se è possibile trovare un sottoinsieme I_1 di I doppiamente connesso con $I - I_1$, e così via.

Teorema I. - Se due insiemi in sè connessi I_1 ed I_2 non aventi elementi in comune sono reciprocamente connessi, l'insieme $I_1 \pm I_2$ è in sè connesso.

Dimostrazione: supponiamo non lo sia. Allora esiste un sottoinsieme I' non connesso a $I'' = I_1 + I_2 - I'$. Siano I'_1 ed I''_1 le sezioni di I_1 rispettivamente con I' e I'' . Supponiamo I'_1 e I''_1 non vuoti. Allora, essendo, come si scorge immediatamente, $I' + I''_1 = I_1$ esiste un V'_1 appartenente a I'_1 e un V''_1 appartenente a I''_1 connessi (per la connessione di I_1). Ma V'_1 appartiene a I' e V''_1 appartiene a I'' . Quindi I' e I'' sono connessi contro l'ipotesi. Allora o I'_1 o I''_1 sono vuoti. Sia I'_1 . Allora I' è un sottoinsieme di I_2 : Ma o $I_2 - I'$ non è vuoto, e allora si applica lo stesso ragionamento precedente, o $I_2 - I'$ è vuoto, e allora I' è identico a I_2 e I'' è identico a I_1 . Ma ciò è ancora contro l'ipotesi, perchè I_1 e I_2 sono connessi reciprocamente. Quindi $I_1 + I_2$ deve essere in sè connesso, come dovevasi dimostrare.

Il teorema si estende immediatamente al caso di n insiemi connessi.

Teorema I-bis. — Siano due insiemi in sè connessi I_1 ed I_2 . Sia l'insieme $I = (I_1 \vdash I_2)$ costituito da tutti gli elementi che appartengono almeno ad I_1 o almeno ad I_2 . Se I_1 ed I_2 hanno un elemento comune V , l'insieme I è in sè connesso.

Dimostrazione: Infatti l'insieme I è costituito da: a) elementi appartenenti a I_1 e non a I_2 ; b) elementi appartenenti a I_2 e non a I_1 ; c) elementi comuni a I_1 e a I_2 . Non vi sono altri elementi. Ora, se I non fosse connesso, esisterebbe un sottoinsieme I' di I non connesso a $I'' = I - I'$. Dico che se I' contiene elementi di I_1 , I'' non può contenerne. Infatti, se ne contenesse essi formerebbero un sottoinsieme di I' il quale sarebbe connesso con un sottoinsieme di I' per la connessione di I_1 . Seguirebbe come nel teorema I che I' sarebbe connesso a I'' . Ma se I'' non contiene elementi di I_1 , tutti gli elementi di I_1 sono in I' . Quindi in particolare V , che appartiene anche a I_2 . Quindi I' contiene elementi di I_2 . Ma I'' deve contenere elementi di I_2 altrimenti sarebbe vuoto. Segue con il ragionamento precedente che I' e I'' sono connessi. Analoga prova se I' non contiene elementi di I_1 . Quindi il teorema è dimostrato.

Teorema II. — Sia un insieme I semplicemente connesso. Sia allora I_1 semplicemente connesso con $I_2 = I - I_1$. Dico che I_1 e I_2 sono in sè connessi.

Dimostrazione: Se I_1 ed I_2 sono semplicemente connessi, esiste una coppia di vertici, V_1 appartenente ad I_1 e V_2 appartenente ad I_2 connessa, e una sola. Supponiamo allora che I_1 sia non connesso. Esisterà allora un sottoinsieme I'_1 di I_1 non vuoto non connesso a $I''_1 = I_1 - I'_1$. V_1 deve appartenere o a I'_1 o a I''_1 . Supponiamo appartenga a I'_1 . Dico che allora I'_1 e $I = I - I'_1$ non sarebbero connessi contro l'ipotesi che I sia connesso. Infatti intanto I sarebbe uguale ad $I_2 + I'_1$. Se I'_1 e I fossero connessi esisterebbe una coppia di vertici V'_1 appartenente a I'_1 e V'' appartenente a I connessi tra di loro. Ora, se V'' appartenesse a I'_1 , I'_1 e I''_1 sarebbero connessi contro l'ipotesi. Allora V'' appartiene a I_2 . Ma V'_1 è certamente diverso da V_1 , perchè per ipotesi V_1 appartiene a I''_1 . Quindi esisterebbe una coppia di punti diversa da V_1 e V_2 connessa da una linea di connessione tra I_1 e I_2 contro l'ipotesi. Il teorema è così dimostrato.

Definizione: secare una linea interna L appartenente a V_1 e V_2 significa sostituirla con due linee esterne, L_1 ed L_2 appartenenti rispettivamente a V_1 e a V_2 .

Un insieme in sè connesso si dice « monosecabile » se è possibile, secando una sola linea interna, (linea di monosecabilità dell'insieme) trasformarlo in un insieme che non sia in sè connesso. Analoghe definizioni per insiemi bi-tri- n -secabili.

Teorema III. — Condizione necessaria e sufficiente perchè un insieme sia monosecabile, è che esso sia semplicemente connesso.

Dimostrazione: la condizione è sufficiente. Infatti, se I (connesso) è semplicemente connesso, esiste un sottoinsieme I_1 non vuoto, tale che I_1 e $I_2 = I - I_1$ (non vuoto) ammettono una linea di connessione L e una sola. Secando L , I_1 e I_2 vengono sconnessi.

La condizione è necessaria: infatti, se I è monosecabile, esiste una \underline{L} tale che, secandola, I si trasforma in un I' non connesso.

Si noti che c'è una corrispondenza biunivoca tra i vertici V' di I' e i vertici V di I , e tra le linee L' di I' e le linee L di I , tranne che per L . Quindi ogni sottoinsieme di I' corrisponde biunivocamente a un sottoinsieme di I . Poichè I' è per ipotesi non connesso, esiste un sottoinsieme non vuoto I'_1 tale che I'_1 e $I'_2 = I' - I'_1$ sono sconnessi. Consideriamo due sottoinsiemi I_1 ed I_2 corrispondenti rispettivamente a I'_1 e I'_2 . Dico che I_1 ed I_2 sono semplicemente connessi tra di loro e la loro unica linea di connessione è \underline{L} . Intanto una linea di connessione esiste certo perchè I è connesso. Supponiamo ora che esista una linea di connessione $L_{1,2}$ diversa da L , e siano V_1 e V_2 i vertici rispettivamente appartenenti a I_1 e I_2 , appartenenti pure a $L_{1,2}$. Consideriamo i vertici corrispondenti in I' , V'_1 e V'_2 appartenenti rispettivamente a I'_1 e I'_2 . Essi sono connessi da $L'_{1,2}$ che corrisponde a $L_{1,2}$ dato che per ipotesi $L_{1,2}$ è diverso da L . Quindi I'_1 e I'_2 sarebbero connessi contro l'ipotesi. Il teorema è dunque completamente dimostrato.

Teorema III-bis. — Dal teorema II e dal teorema III segue immediatamente il seguente teorema: Se secando un insieme semplicemente connesso I lo si trasforma in un insieme non connesso I' i cui sottoinsiemi I'_1 e $I'_2 = I' - I'_1$ non sono reciprocamente connessi, i sottoinsiemi stessi sono in sè connessi.

Dalla dimostrazione del teorema III si ricava immediatamente che non si trasforma un insieme connesso in un insieme non connesso secando una linea non interna all'insieme. Segue il corollario seguente:

Corollario I: Se secando una certa linea L si trasforma un insieme connesso I in un insieme sconnesso I' , L è linea interna di I .

Definizione: Due vertici V_1 e V_2 appartenenti a un insieme I si dicono « collegati in I » se esiste un sottoinsieme I' di I a cui V_1 e V_2 appartengano entrambi, che sia in sè connesso.

Definizione: Un vertice e una linea si dicono collegati in I se la linea appartiene a un vertice collegato al vertice dato in I .

Dal teorema I-bis segue immediatamente:

Corollario II: Se V_1 è collegato a V_2 in I e se V_2 è collegato a V_3 in I , V_1 è collegato a V_3 in I . Idem per le linee.

Definizione: Sia un insieme I e siano $L_1 \dots L_n$ le linee esterne di I . Si dice che I è monosecabile rispetto a $L_1(L_1 \dots L_r)$ se è monosecabile e se è possibile

trasformarlo monosecandolo in un insieme I' che possieda due sottoinsiemi non vuoti I'_1 e $I'_2 = I' - I'_1$ non connessi, e tali che $L_1(L_1 \dots L_r)$ sia linea esterna di I'_1 e tutte le altre linee esterne di I'_2 . (I'_1 e I'_2 non possono avere linee esterne comuni perchè non hanno vertici comuni, teorema I-bis).

Teorema IV. — Se due vertici V_1 e V_2 di I sono collegati in I e se secondo una certa linea interna L di I , I viene trasformato in un I' tale che V'_1 e V'_2 corrispondenti a V_1 e a V_2 non siano più collegati in I' , L è linea di monosecabilità di qualunque sottoinsieme in sè connesso di I che contenga V_1 e V_2 .

Dimostrazione: Supponiamo che non lo sia. Allora esisterebbe un sottoinsieme \underline{I} di I contenente V_1 e V_2 in sè connesso, e tale che \underline{I}' sarebbe ancora in sè connesso. (Cfr. dimostrazione teorema III). Quindi V'_1 e V'_2 sarebbero collegati in I' tramite \underline{I}' , contro l'ipotesi. Da questo teorema e dal corollario I segue immediatamente che la linea L è linea interna di qualunque sottoinsieme in sè connesso di I che contenga V_1 e V_2 .

Definizione: Sia I monosecabile rispetto a una linea esterna L_1 e sia $L_{1,2}$ una linea di monosecabilità rispetto a L_1 . Secondo $L_{1,2}$, I si trasforma in I' con due sottoinsiemi I'_1 contenente L'_1 e I'_2 contenente le altre esterne, non connessi. Diciamo che ogni elemento di I_1 ammette $L_{1,2}$ come linea di monosecabilità rispetto a L_1 .

Osservazione I: $L_{1,2}$ appartiene per il teorema III a V_1 e V_2 appartenenti rispettivamente a I_1 e I_2 . Quindi V_1 ammette in ogni caso $L_{1,2}$ come linea di monosecabilità rispetto a L_1 .

Corollario III: Qualunque sottoinsieme \underline{I} di un insieme I costituito da elementi non ammettenti linee di monosecabilità rispetto a una certa L , non contiene linee interne di monosecabilità rispetto a L . Infatti, se ne ammettesse una e fosse $L_{1,2}$, uno almeno dei vertici ai quali $L_{1,2}$ appartiene per l'osservazione I ammetterebbe $L_{1,2}$ come linea di monosecabilità rispetto a L . Ma tale vertice apparterebbe anche ad \underline{I} e ciò è contro l'ipotesi.

Definizione: Diciamo che $L_{1,2}$ è una linea di « ultima monosecabilità » rispetto a una esterna L_1 in I se il sottoinsieme I_2 definito come nelle definizioni precedenti, non contiene elementi che ammettano linee di monosecabilità rispetto ad L_1 in I .

Teorema V. — Se un insieme connesso I possiede una linea di monosecabilità rispetto a una esterna L_1 , esso ammette una linea di ultima monosecabilità e una sola rispetto ad L_1 .

Dimostrazione: Sia I_1 il sottoinsieme di tutti i vertici in I che ammettono una linea almeno di monosecabilità rispetto a L_1 , e sia I_2 il sottoinsieme costituito da tutti i vertici che non ammettono linee di monosecabilità rispetto a L_1 in I . Intanto $I = I_1 + I_2$, I_1 ed I_2 non hanno elementi in comune e non sono vuoti. Dico che I_1 ed I_2 sono monococonnessi. Intanto sono connessi tra di loro. Se non lo fossero non lo sarebbe I . Quindi esiste certo una linea di connessione \underline{L} tra I_1 e I_2 . Dico che non ve ne sono altre. Infatti, sia \underline{L} appartenente a V_1 e V_2 e sia V_1 appartenente a I_1 , V_2 appartenente a I_2 . Dico che L è linea di monosecabilità rispetto a L_1 , ammessa da V_1 . Infatti, poichè V_1 appartiene a I_1 ammette certo una linea di monosecabilità rispetto a L_1 .

Sia L . Se L fosse diverso da L_1 , secondo L , V'_1 resterebbe collegato con V'_2 . Quindi o V'_2 è scollegato dalle linee esterne diverse da L_1 , e allora V_2 ammette L come linea di monosecabilità rispetto a L_1 contro l'ipotesi, oppure no, e allora per il teorema I-bis V'_1 resta collegato a queste linee esterne, e quindi L non sarebbe linea di monosecabilità ammessa da V_1 rispetto a L_1 .

Quindi V_1 ammette una unica linea di monosecabilità e questa è L . Segue che secondo L dividiamo I in due sottoinsiemi I_3 ed I_1 , I_3 di cui L_1 è esterna, I_4 di cui tutte le altre sono esterne.

Ora, evidentemente I_3 è un sottoinsieme di I_1 .

Se esistesse una seconda linea L^0 di connessione tra I_1 ed I_2 essa dovrebbe appartenere a un vertice di $I_1 - I_3$ e non a un vertice di I_3 . Infatti se appartenesse a un vertice V_3 di I_3 , appartenendo anche a un vertice V'_2 di I_2 (perchè di connessione fra I_1 e I_2) dato che V'_2 non può essere sconnesso dalle linee esterne diverse da L_1 secondo L (vedi sopra), collegherebbe V_3 alle linee esterne diverse da L_1 contro l'ipotesi.

Ma ora dico che $I_1 - I_3$ è vuoto. Infatti, se non lo fosse esisterebbe almeno un V che godrebbe della seguente proprietà: ammetterebbe una linea di monosecabilità rispetto a L_1 e sarebbe scollegabile da L_1 secondo L . Ora, ciò è impossibile. Infatti dire che V ammette una linea di monosecabilità rispetto a L_1 vuol dire che esiste un sottoinsieme I_k connesso, contenente L_1 e V monosecabile da $I - I_k$ contenente tutte le altre linee esterne. Ora, questo sottoinsieme contiene solo vertici appartenenti a I_1 chè, se contenesse vertici appartenenti a I_2 questi ammetterebbero una linea di monosecabilità (quella che connette I_k e $I - I_k$) rispetto ad L_1 contro l'ipotesi.

Ma per il teorema IV, L dovrebbe essere interno di I_k , e quindi di I_1 (qualunque linea interna a un sottoinsieme è interna all'insieme). Ma ciò non è possibile perchè L appartiene a un solo vertice di I_1 . Quindi $I_1 - I_3$ è vuoto. Pertanto L^0 non esiste. Inoltre I_3 è identico a I_1 e quindi I_4 è identico a I_2 .

Segue che L è una linea di ultima monosecabilità rispetto a L_1 .

Dico che non ce ne possono essere altre. Se ce ne fosse un'altra L^0 essa non potrebbe essere interna a I_2 per il corollario III.

Non potrebbe essere di connessione fra I_1 ed I_2 per la dimostrazione precedente. Quindi dovrebbe essere interna a I_1 . Ma ciò è assurdo per la definizione di linea di ultima monosecabilità. Infatti essa apparterebbe a vertici ammettenti entrambi linee di monosecabilità, e quindi ognuno dei due sottoinsiemi in cui si suddividerebbe I , secondo L^0 , contenendo uno dei due vertici suddetti non godrebbe della proprietà richiesta.

Il teorema è pertanto completamente dimostrato.

Definizione: Sia L una linea di monosecabilità rispetto alla esterna E in un insieme I ; detti I_1 ed I_2 i due sottoinsiemi di I connessi da L , se E appartiene a I_1 e se L_1 è una linea di monosecabilità rispetto ad E diversa da L , diciamo che L_1 segue L (è seguente) se è interna a I_2 , che è antecedente, se è interna a I_1 .

Teorema VI. - Se L_1 è una seguente di L , L non può essere una seguente di L_1 . Infatti siano I_3 ed I_4 i sottoinsiemi di I connessi da L_1 , e sia E appartenente a I_3 . Dico che non v'è nessun vertice comune a I_1 e a I_4 . Infatti I_1 è connesso (teorema II), e anche il suo trasformato I'_1 per l'operazione di secare L_1 è in sé connesso, perchè L_1 non è interna a I_1 . Segue che se ci fosse

un vertice comune a I_1 e a I_4 , I_4 sarebbe collegato con E contro l'ipotesi. Segue allora che L non può essere interna a I'_1 perchè L appartiene a un vertice appartenente a I_1 nè può essere esterna perchè distinta da L_1 . Quindi L non può appartenere a I_4 e quindi non segue L_1 c. d. d.

Teorema VI'. — Siano tre linee di monosecabilità rispetto a E , L_1 , L_2 , L_3 , e sia L_1 seguente L_2 ed L_2 seguente L_3 . Allora L_1 segue L_3 .

Dimostrazione: siano I_{11} , I_{12} i due sottoinsiemi connessi da L_1 , e analogamente si definiscono I_{21} , I_{22} , I_{31} , I_{32} . Dalla dimostrazione del teorema VI segue che I_{12} è un sottoinsieme di I_{22} , e che I_{22} è un sottoinsieme di I_{32} . Segue che I_{12} è un sottoinsieme di I_{32} e che quindi L_1 è seguente di L_3 c. d. d.

Dai teoremi VI e VI' si deduce che le linee di monosecabilità rispetto a una certa esterna E possono essere « ordinate » in un modo univoco secondo la definizione precedente.

Definizione: Siano due linee L_1 ed L_2 di monosecabilità rispetto ad E ; se l'insieme delle linee di monosecabilità che seguono L_1 è costituito dall'insieme di quelle che seguono L_2 , da L_2 e da nessun'altra, si dice che L_1 precede immediatamente L_2 ed L_2 segue immediatamente L_1 .

Teorema VII. — Data una linea di monosecabilità L rispetto ad E ammettente almeno una linea di monosecabilità antecedente, esiste una linea L_1 di monosecabilità e una sola che precede immediatamente L .

Dimostrazione: si consideri l'insieme I_2 di tutti i vertici che non ammettono linee di monosecabilità rispetto ad E diversi da L o da linee di monosecabilità che seguono L . Sia $I_1 = I - I_2$. I_1 ed I_2 sono connessi da una linea di monosecabilità che è L_1 . La dimostrazione di questo punto e della unicità di L_1 è identica a quella del teorema V).

Teorema VII'. — Se L_1 precede immediatamente L non può precedere immediatamente nessun'altra linea di monosecabilità rispetto ad E .

Dimostrazione: supponiamo che L_1 preceda immediatamente $\underline{L} \neq L$. Per la definizione stessa di precedente o seguente \underline{L} deve precedere o seguire L . Supponiamo che \underline{L} segua L . Allora L è diverso da \underline{L} e da ognuna delle linee che seguono L , e pure segue L_1 . Quindi L_1 non può precedere immediatamente \underline{L} per la definizione. Analoga dimostrazione se L segue \underline{L} .

Teorema VII''. — Se L è di monosecabilità rispetto a L e non è linea di ultima monosecabilità, esiste una linea L_1 che la segue immediatamente e una sola.

La dimostrazione procede come quella del teorema VII ponendo la linea di ultima monosecabilità rispetto ad E al posto di E (trattandola cioè come una linea esterna) e notando che le nozioni « precedere » e « seguire » sono duali rispetto allo scambio di E e della linea di ultima secabilità rispetto ad E .

Teorema VII'''. — Se L_1 segue (precede) immediatamente L_2 non esiste nessuna linea che segua (preceda) L_2 e preceda (segua) L_1 contemporaneamente.

Il teorema discende immediatamente dai precedenti. L'insieme dei teoremi V, VI e VII è sufficiente a definire completamente la nozione di « catena di monosecabilità » come è stata utilizzata nel § 3. È chiaro che esiste una

unica catena di monosecabilità possibile rispetto ad E e che ogni linea di monosecabilità rispetto ad E appartiene alla detta catena e vi occupa un « posto » ben definito. Le cose che si sono dette per una linea esterna si possono ripetere per un gruppo.

Passiamo ora alle catene di bisecabilità. Poichè le considerazioni da farsi sono analoghe a quelle per le catene di monosecabilità, daremo solo le linee principali da seguirsi per definire o dimostrare le proprietà utilizzate nel testo.

Si cominci con il notare che una linea di bisecabilità L rispetto ad E è tale in associazione con un insieme $C(L)$ di altre linee. Si trasformi infatti l'insieme I in un insieme I' secando L , e siano L_1 ed L_2 le nuove linee esterne che sostituiscono L . Sono linee di bisecabilità rispetto ad E , associate con L , le linee di monosecabilità di I' rispetto al gruppo di linee esterne E' e, ad esempio, L_1 e solo quelle. Infatti per la definizione sono linee di bisecabilità insieme ad L rispetto ad E quelle di monosecabilità di I' che connettono due sottoinsiemi l'uno dei quali contiene E' e non altre linee corrispondenti alle esterne di I , e che non corrispondono a linee di monosecabilità di I rispetto a E .

Sia L una tale linea « associata » ad L e sia I_1 il sottoinsieme contenente E' ottenuto secando L' . Dico che se I_1 non contenesse anche L_1 (o L_2) L' corrisponderebbe a una linea di monosecabilità di I rispetto a E . Ciò segue subito dalla osservazione che allora L_1 ed L_2 apparirebbero a I'_2 , e quindi L sarebbe interna ad L_2 corrispondente di I'_2 . I_1 ed I_2 sarebbero allora connesse solo tramite L . In modo analogo si può dimostrare che L' non può essere linea di monosecabilità rispetto al gruppo E' , L_1 ed L_2 .

Si verifica allora che $C(L)$ insieme corrispondente alle linee di monosecabilità di I' rispetto ad E' e ad L_1 , costituisce anche l'insieme delle linee di bisecabilità associate ad L . Infatti, sia L una linea associata ad L , e sia L' linea di monosecabilità rispetto ad E' ed a L_1 in I' . Dico che non ve ne possono essere relative ad L' e ad L_2 . Infatti L_1 è collegata alle esterne diverse da E' tramite la catena $\bar{C}(L)$, e L_2 è collegata invece ad L' tramite detta catena. Pertanto L_1 non può essere « scollegata » da detta catena senza scollegarla dalle esterne diverse da E' , ed analogamente L_2 non può essere scollegata da $C(L)$ senza scollegarla da E' . Segue che L_1 ed L_2 non possono essere scollegate tra di loro senza o scollegare L_1 dalle esterne diverse da E' , o L_2 da E' . Da ciò segue immediatamente l'asserto.

Si consideri ora in I' la linea di ultima monosecabilità rispetto ad L_1 . Essa determina una catena di monosecabilità rispetto a L_1 avente linee di monosecabilità L'_{1r} . Analogamente si consideri in I' la catena di monosecabilità rispetto a L_2 con le linee di monosecabilità L'_{2r} . L'insieme è costituito dalle linee corrispondenti in I ad L'_{1r} , L'_{2r} , e da L sia $\bar{C}(L)$.

Si può allora dimostrare in modo simile a quanto si è fatto per il teorema precedente, che ogni linea appartenente a $C(L)$ è linea di bisecabilità rispetto ad E che ammette come insieme di linee associate $C(L)$, e viceversa ogni linea L di $C(L)$ è linea di bisecabilità che ammette come insieme di linee associate $C(L)$.

Si possono quindi definire degli insiemi associati di linee di bisecabilità.

Ora, sostituendo semplicemente la nozione di « insieme associato di bisecabilità » a quello di « linea di monosecabilità » si possono dimostrare per gli insiemi associati di bisecabilità gli stessi teoremi dimostrati per le linee di monosecabilità. In particolare si può definire un « ultimo insieme associato di bisecabilità » rispetto a E e dimostrare che è unico.

È facile allora definire in modo preciso la nozione di « ultime linee di biseccabilità » e dimostrare l'unità della coppia. Infatti, se per esempio, L è la linea di biseccabilità appartenente all'ultimo insieme associato », una delle due ultime linee di biseccabilità rispetto a E sarà data dall'ultima linea di monoseccabilità nell'insieme I' , relativa a E' e a L_1 (cfr. sopra). L'altra è individuata in modo analogo.

Le linee di triseccabilità e le catene di triseccabilità si trattano in modo perfettamente simile, e non indugeremo su di esse.

Vogliamo piuttosto discutere brevemente la questione delle parti semplicemente o doppiamente connesse al resto, non contenenti linee esterne.

Bisogna distinguere due casi:

1) La parte in questione contiene solo vertici, ordinari o no, relativi alla « interazione ». Il caso della semplice connessione è allora subito scartato perchè se la linea di connessione è fotonica per una immediata generalizzazione del teorema di Furry la parte considerata si annulla, e d'altra parte elettronica non può essere per la conservazione della carica. Se si considerano come esterne le linee concorrenti a vertici diversi da quelle relative alla « interazione » il caso della doppia connessione non può dar luogo ad alcuna divergenza, tenuto conto del fatto che in ogni caso le linee esterne devono essere almeno due.

2) La parte in questione contiene vertici di altra natura: (come, per esempio, se l'operatore A_ν è proprio $A_{\mu\nu}(p)$, $A_\mu(p)$ essendo una componente di Fourier del potenziale e.m. A . In tal caso si ha un vertice al quale concorre una unica linea fotonica). In questo caso, si isolano i vertici di altra natura, (supposti in numero finito), come si è detto, considerando le linee che vi concorrono come linee esterne, e così ogni difficoltà relativa è eliminata.

SUMMARY

A renormalization method for quantum electrodynamics which in no step does make use of the perturbation theory, is carried on by using some ideas proposed in an earlier paper. In this method the electric charge is a parameter which may vary with continuity. It is then shown how it is possible to construct explicitly the Feynmann representation of any observable for a value of the charge which differs by an infinitesimal amount from a given value, when this representation is supposed known for the given value of the charge. It is shown further how the divergences which arise by varying the charge can be formally eliminated by means of the renormalization.

Sugli elettroni e fotoni negli sciami estesi di raggi cosmici.

C. MILONE

Istituto di Fisica dell'Università - Catania

(ricevuto l'11 Giugno 1953)

Riassunto. — Mediante contatori di G.M. viene studiato a Catania, 40 m s.l.d.m., il rapporto

$$\frac{f}{e} = \frac{\text{numero di fotoni per unità di superficie}}{\text{numero di elettroni per unità di superficie}}$$

negli sciami estesi di raggi cosmici. Gli sciami selezionati hanno la massima frequenza per densità $\Delta \cong 2$ particelle/m². I fotoni vengono rivelati col metodo delle anticoincidenze rivelando gli elettroni prodotti in uno schermo di piombo di spessore h variabile fra zero e 30 mm. Al fine di trarre informazioni sul rapporto f/e sia a qualche metro che a qualche decina di metri dall'asse dello sciame, due dispositivi E , destinati a rivelare i fotoni e gli elettroni, sono stati posti uno in prossimità dei contatori che selezionano gli sciami ($d = 0$) e l'altro a 50 m da essi ($d = 50$ m). La superficie dei rivelatori E è molto più piccola della superficie dei contatori che rivelano gli sciami, così che risulta piccola la probabilità che un elettrone ed un fotone dello sciame colpiscano contemporaneamente il rivelatore E . Evitando in tal modo che i fotoni siano mascherati dagli elettroni coerenti si traggono informazioni sul rapporto f/e direttamente dai dati sperimentali. Si trova per tale via che $f/e \cong 1$ sia per $d = 0$ che per $d = 50$ m (prima approssimazione). Allo stesso risultato si giunge tenendo conto dei casi in cui un elettrone ed un fotone degli sciami colpiscono contemporaneamente il rivelatore E (seconda approssimazione). Viene determinato successivamente l'andamento della probabilità P_f di trovare sotto uno spessore h di piombo almeno un elettrone prodotto da un fotone dello sciame; l'andamento della P_f ; sia per $d = 0$ che per $d = 50$ m, non risulta molto differente dall'andamento \bar{P}_{ph} calcolato da ARLEY per un determinato spettro di energia dei fotoni incidenti. Viene poi determinato il coefficiente di assorbimento dei fotoni negli sciami e si trova $\mu = 0,53 \pm 0,06$ cm⁻¹ Pb per $d = 0$ e $\mu = 0,50 \pm 0,06$ cm⁻¹ Pb per $d = 50$ m. In base a tali valori di μ si deduce che una elevata percentuale dei fotoni negli sciami selezionati deve avere energia inferiore ai 10 MeV, sia per $d = 0$ che per $d = 50$ m.

1. - Introduzione.

Lo scopo di questo lavoro è quello di determinare negli sciami estesi di raggi cosmici il rapporto

$$\frac{f}{e} = \frac{\text{numero di fotoni per unità di superficie}}{\text{numero di elettroni per unità di superficie}}$$

e studiarne la dipendenza dalla distanza dall'asse dello sciame e dalla densità media dello sciame.

Un tale studio ci è sembrato opportuno in quanto esso può fornire ulteriori notizie sulla fenomenologia degli sciami estesi e contribuire alla interpretazione della fenomenologia stessa, mentre le poche notizie che si hanno finora sul rapporto f/e negli sciami ⁽¹⁻⁴⁾ sono fra loro piuttosto discordanti e si riferiscono solo ad una zona non molto lontana dall'asse dello sciame.

Con la presente misura inoltre viene determinato l'andamento della probabilità P_r di trovare sotto uno spessore variabile di piombo, almeno un elettrone prodotto nel piombo da un fotone degli sciami, sia in prossimità dell'asse che a qualche decina di metri dall'asse dello sciame. Tale determinazione può dare informazioni sullo spettro di energia dei fotoni negli sciami, e ci sembra non sia stata finora eseguita. Informazioni sulla energia dei fotoni negli sciami vengono infine ricavate in base alla determinazione del coefficiente di assorbimento dei fotoni in piombo sia in prossimità dell'asse che a qualche decina di metri dall'asse dello sciame ⁽⁵⁾.

Il dispositivo sperimentale impiegato è tale che in prima approssimazione sia l'andamento della P_r , sia il valore del rapporto f/e può venire fornito direttamente dai dati sperimentali.

I primi risultati di questo lavoro sono stati comunicati al congresso della S.I.F. a Bergamo nel Settembre del 1952.

2. - Dispositivo sperimentale.

2.1. *Dispositivo per selezionare gli sciami.* - Quattro gruppi di contatori A, B, C, D, ciascuno di superficie S , erano disposti in un piano orizzontale

⁽¹⁾ J. CLAY: *Suppl. al Nuovo Cimento*, **6**, 353 (1949).

⁽²⁾ D. D. MILLAR: *Nuovo Cimento*, **8**, 279 (1951).

⁽³⁾ P. BASSI, A. BIANCHI e C. MANDUCHI: *Nuovo Cimento*, **8**, 735 (1951); **9**, 358 (1952).

⁽⁴⁾ M. W. BRUIN: *Thesis*, Amsterdam (1952). Comunicazione privata.

⁽⁵⁾ Indicazioni sullo spettro di energia dei fotoni negli sciami sono state ottenute da MILLAR ⁽²⁾.

come nella fig. 1. Le coincidenze triple T , del tipo $A + B + C$, $A + B + D$, $A + C + D$, selezionavano gli sciami. Al fine di ridurre il numero delle coincidenze casuali le coincidenze triple T erano ottenute mediante la coincidenza fra due coincidenze doppie come è indicato nella fig. 2.

2.2. *Dispositivo per rivelare i fotoni e gli elettroni appartenenti agli sciami selezionati.* — Nella parte centrale rispetto ai gruppi $ABCD$ (fig. 1) era posto il dispositivo per rivelare i fotoni e gli elettroni degli sciami; esso è rappre-

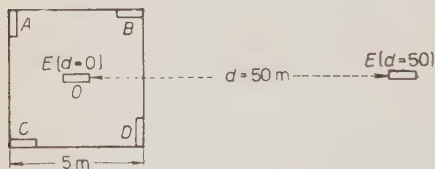


Fig. 1. — Disposizione dei gruppi di contatori A, B, C, D che selezionano gli sciami e dei gruppi E impiegati per rivelare gli elettroni ed i fotoni degli sciami.

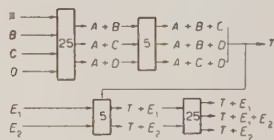


Fig. 2. — I circuiti di registrazione; i numeri indicano, in microsecondi, le costanti di tempo di ingresso nei circuiti di coincidenza.

sentato nella fig. 3 in cui E_1 ed E_2 sono due gruppi di contatori di superficie s ciascuno, schermati lateralmente da piombo e separati da uno strato di piombo con spessore h variabile da 0 a 30 mm.

I fotoni venivano rivelati col metodo delle anticoincidenze ⁽⁶⁻⁸⁾: un evento $T + E_2$ non accompagnato da un evento $T + E_1 + E_2$ è attribuibile ad un fotone che dà origine ad almeno un elettrone nello schermo fra E_1 ed E_2 . Però non tutti i fotoni che producono fra E_1 ed E_2 elettroni che colpiscono E_2 danno luogo ad una anticoincidenza $(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)$; questa infatti non ha luogo se il fotone è accompagnato da un elettrone che colpisce E_1 (eventi $T + eE_1 + fE_2$). Per ridurre la probabilità di simili eventi è stata scelta

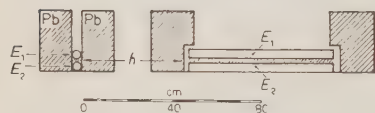


Fig. 3. — Disposizione dei gruppi E_1 ed E_2 per rivelare gli elettroni ed i fotoni degli sciami nel caso $d = 0$.

per i gruppi E_1 una superficie s molto minore della superficie S dei gruppi A, B, C, D ($s = 0,024 \text{ m}^2$; $S = 0,3 \text{ m}^2$), di modo che si può ritenere che nella

⁽⁶⁾ L. JÁNOSSY e B. ROSSI: *Proc. Roy. Soc., A* **175**, 89 (1940).

⁽⁷⁾ L. JÁNOSSY: *Cosmic Rays* (Oxford, 1950), p. 160 e segg.

⁽⁸⁾ B. ROSSI: *High-energy particles* (New York, 1952), p. 323 e segg.

maggior parte dei casi il gruppo E_1 venga colpito ogni volta da una sola particella (elettrone o fotone). In tale modo gli eventi $T + E_1 + E_2$ sono attribuibili per la maggior parte ad elettroni e ciò permetterà nel seguito di ricavare direttamente dai dati sperimentali informazioni approssimate sul rapporto f/e .

Per ricavare informazioni sul rapporto f/e in una zona non prossima all'asse dello sciame è stato posto alla distanza $d = 50$ m dal centro di $ABCD$ (fig. 1), un dispositivo simile a quello rappresentato nella fig. 3 e differente da quello solo per il valore della superficie s che in questo caso era di $0,08 \text{ m}^2$. Questo valore di s è stato scelto in modo tale da avere $(T + E_1)_{d=0} \cong (T + E_1)_{d=50}$. In questo modo gli eventi $T + eE_1 + fE_2$ (già poco probabili) hanno egual peso nei due casi $d = 0$ e $d = 50$. Ciò permetterà un confronto diretto dei risultati ottenuti nel caso $d = 0$ con quelli ottenuti nel caso $d = 50$. La superficie $s = 0,08 \text{ m}^2$ era ottenuta mediante due contatori lunghi un metro, posti l'uno accanto all'altro, con l'asse nella direzione d (fig. 1).

3. - Correzione per tenere conto delle particelle penetranti.

Al fine di sottrarre agli eventi $T + E_1$, $T + E_1 + E_2$, e $T + E_2$ registrati quelli dovute a particelle penetranti, è stata eseguita una misura ponendo sopra il gruppo E_1 nel dispositivo della fig. 3 uno strato di piombo di 150 mm di spessore (senza assorbente fra E_1 ed E_2) e sono stati attribuiti a particelle penetranti tutti gli eventi $(T + E_1)_{150}$, $(T + E_1 + E_2)_{150}$ e $(T + E_2)_{150}$ registrati in queste condizioni. La sottrazione è stata effettuata nel modo seguente: riferendoci ad un generico tipo di eventi registrati sotto 150 mm Pb, per esempio $(T + E_1 + E_2)_{150}$, è stato determinato una volta per tutte il rapporto $(T + E_1 + E_2)_{150}/T = R_{1+2}$. Riferendoci poi agli eventi registrati senza piombo sopra E_1 (§ 2.2) si è posto:

$$T + E_1 + E_2 = (T + E_1 + E_2) \text{ registrati} - (R_{1+2})T,$$

in cui $T + E_1 + E_2$ sono gli eventi (corretti dalle particelle penetranti) che saranno presi in considerazione in questo lavoro, e T è il numero delle coincidenze triple ottenute durante la registrazione delle $(T + E_1 + E_2)$ registrate.

Facciamo osservare che in questa correzione degli eventi $T + E_1$, $T + E_1 + E_2$ e $T + E_2$ è compresa anche la correzione per le coincidenze casuali (peraltro in piccola percentuale) fra un evento T dovuto ad uno sciame ed una particella penetrante incoerente che colpisce E_1 , oppure $E_1 + E_2$, oppure E_2 . È compresa cioè la maggior parte della correzione per le coincidenze casuali dato che fra le particelle incoerenti con le particelle dello sciame la maggior parte sono penetranti. Nessun'altra correzione è stata apportata agli eventi registrati.

4. - I risultati sperimentali.

I risultati delle misure sono riassunti nella tabella I. Le prime righe della tabella sono relative alla misura per determinare la correzione per le particelle penetranti, le rimanenti righe sono relative alla misura per la determinazione di f/e ; d = distanza fra il centro dei gruppi A , B , C , D (fig. 1) ed il gruppo per la rivelazione di f ed e .

Circa il significato di P_e e di $(f/e)P_f$ che figurano nella tabella I rimandiamo al successivo paragrafo relativo alla interpretazione dei risultati.

TABELLA I.

$S_A = S_B = S_C = S_D = S = 0,3 \text{ m}^2$. $T = A + B + C$; $A + B + D$; $A + C + D$.										
d (m)	$S_{E_1} =$ $= S_{E_2} =$ $= S$ (m ²)	Pb sopra E_1 (mm)	Minuti	$T + E_1$	$T + E_1 +$ $+ E_2$	$T + E_2$	T	$\frac{T + E_1}{T}$	$\frac{T + E_1 + E_2}{T}$	$\frac{T + E_2}{T}$
0	0,024	150	18 960	347	175	396	79 669	0,0044	0,0022	0,0050
50	0,08	150	20 305	561	399	600	94 373	0,0060	0,0042	0,0064
d (m)	$S_{E_1} =$ $= S_{E_2} =$ $= S$ (m ²)	Pb fra E_1 ed E_2 (mm)	Minuti	$T + E_1$	$T + E_1 +$ $+ E_2$	$T + E_2$	T	$\frac{T + E_2}{T + E_1 + E_2} - 1$	P_e	$(f/e)P_f$
0	0,024	0	10 430	1 807	873	1 139	43 552	$0,30 \pm 0,02$	$1,00 \pm 0,04$	$0,25 \pm 0,02$
		3	7 180	1 223	453	750	29 172	$0,65 \pm 0,05$	$0,73 \pm 0,04$	$0,51 \pm 0,03$
		6	15 265	2 631	830	1 450	68 537	$0,75 \pm 0,04$	$0,60 \pm 0,03$	$0,50 \pm 0,02$
		9	16 309	2 610	777	1 378	74 060	$0,77 \pm 0,04$	$0,54 \pm 0,03$	$0,48 \pm 0,02$
		12	5 845	895	274	487	24 998	$0,78 \pm 0,04$	$0,48 \pm 0,04$	$0,45 \pm 0,03$
		15	13 720	2 433	616	1 106	57 774	$0,79 \pm 0,05$	$0,43 \pm 0,01$	$0,42 \pm 0,02$
		18	4 255	686	148	260	18 393	$0,77 \pm 0,09$	$0,36 \pm 0,04$	$0,34 \pm 0,03$
		24	7 600	1 345	252	459	30 792	$0,82 \pm 0,08$	$0,30 \pm 0,03$	$0,32 \pm 0,02$
		30	14 295	2 752	472	785	69 615	$0,67 \pm 0,05$	$0,26 \pm 0,02$	$0,22 \pm 0,01$
50	0,08	0	5 730	863	609	663	23 114	$0,09 \pm 0,01$	$1,00 \pm 0,05$	$0,07 \pm 0,01$
		3	2 820	493	264	381	11 885	$0,44 \pm 0,04$	$0,72 \pm 0,06$	$0,33 \pm 0,03$
		6	4 140	658	321	538	17 458	$0,67 \pm 0,06$	$0,63 \pm 0,05$	$0,48 \pm 0,03$
		9	5 815	1 104	470	745	25 725	$0,59 \pm 0,04$	$0,54 \pm 0,03$	$0,33 \pm 0,02$
		12	7 135	1 291	474	748	30 837	$0,58 \pm 0,04$	$0,44 \pm 0,03$	$0,28 \pm 0,02$
		18	7 700	1 141	386	592	33 165	$0,53 \pm 0,04$	$0,39 \pm 0,03$	$0,24 \pm 0,02$
		27	8 305	1 281	337	525	34 837	$0,56 \pm 0,05$	$0,28 \pm 0,02$	$0,19 \pm 0,01$

5. - Interpretazione dei risultati.

5.1. *Prima approssimazione.* - In un primo tempo trascuriamo gli eventi del tipo $T + eE_1 + fE_2$; in tale caso tutti gli eventi $T + E_1 + E_2$ sono attribuibili ad elettroni, e gli eventi $(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)$ a fotoni. Secondo le usuali ipotesi sulla costituzione degli sciami, se

$$F(\Delta) d\Delta = K \Delta^{-(\gamma+1)} d\Delta$$

rappresenta il numero degli sciami con densità compresa fra Δ e $\Delta + d\Delta$ la frequenza degli eventi $T + E_2$ può essere espressa dalla relazione

$$T + E_2 = K \int_0^{\infty} (\Delta^{-(\gamma+1)} \{1 - \exp[-S\Delta]\}^3 (1 - \exp[-s(\Delta h + \delta h)]) d\Delta,$$

in cui

Δh = densità degli elettroni sotto lo spessore h di piombo,
 δh = densità sotto lo spessore h di piombo, degli elettroni generati da fotoni,
 $\gamma + 1 = 2,4$, relativamente al valore di S preso qui in considerazione ⁽³⁾.

Analogamente si ha:

$$T + E_1 + E_2 = K \int_0^{\infty} (\Delta^{-(\gamma+1)} \{1 - \exp[-S\Delta]\}^3 (1 - \exp[-s\Delta h]) d\Delta.$$

Osserviamo ora che la funzione $(\Delta^{-(\gamma+1)} \{1 - \exp[-S\Delta]\}^3)$, che nel seguito indicheremo con $[\alpha]$, col crescere di Δ cresce rapidamente, raggiunge un massimo per $\Delta \cong 2$ e poi decresce pure rapidamente (fig. 4). Per conseguenza sebbene nell'integrale $T + E_2$, il termine

$$1 - \exp[-s(\Delta h + \delta h)] = 1 - \exp\left[-s\Delta\left(\frac{\Delta h}{\Delta}\right)\left(1 + \frac{\delta h}{\Delta h}\right)\right],$$

cresca col crescere di Δ , la maggior parte del contributo all'integrale stesso è dato da sciami con densità inferiore a qualche decina di particelle/m². Per

⁽³⁾ $\gamma = 1,31 \pm 0,038 \log_e (I/S)$, (S in m²), secondo G. COCCONI e V. COCCONI TONGIORGI: *Phys. Rev.*, **75**, 1058 (1949).

tali valori di Δ il prodotto $s\Delta$ è piuttosto piccolo, così che si può porre approssimativamente ⁽¹⁰⁾,

$$1 - \exp \left[(-s\Delta) \left(\frac{\Delta h}{\Delta} \right) \left(1 + \frac{\delta h}{\Delta h} \right) \right] \cong \left(1 + \frac{\delta h}{\Delta h} \right) \left(1 - \exp \left[-s\Delta \frac{\Delta h}{\Delta} \right] \right).$$

Ammettendo che il rapporto $\delta h/\Delta h$ non dipenda da Δ , in base alla espressione dei due precedenti integrali risulta:

$$\frac{T + E_2}{T + E_1 + E_2} \cong 1 + \frac{\delta h}{\Delta h}, \quad \text{cioè} \quad \frac{(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)}{T + E_1 + E_2} \cong \frac{\delta h}{\Delta h}.$$

Poniamo $\delta h = P_f (f/e) \cdot \Delta$, in cui P_f (funzione di h) è la probabilità di trovare sotto lo spessore h di piombo almeno un elettrone quando sul piombo giunge un fotone dello sciame; (f/e) = rapporto fotoni/elettroni cercato.

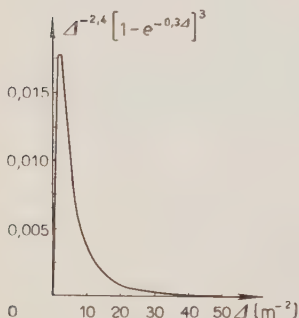


Fig. 4. - Andamento, calcolato, della funzione $\Delta^{-2,4} [1 - \exp(-0,3\Delta)]^3$.

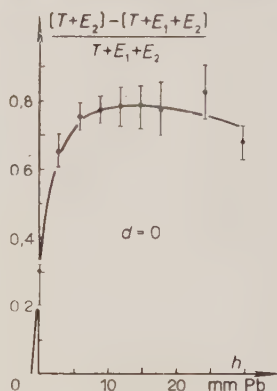


Fig. 5. - Andamento, in funzione di h , dei valori sperimentali $[(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)] / (T + E_1 + E_2)$ nel caso $d = 0$.

Poniamo inoltre $\Delta h = P_e \Delta$ in cui P_e = (funzione di h) è la probabilità di trovare sotto lo spessore h di piombo almeno un elettrone quando sul piombo giunge un fotone dello sciame.

Si può allora scrivere

$$\frac{(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)}{T + E_1 + E_2} \cong \frac{\delta h}{\Delta h} = \frac{f P_f}{e P_e}.$$

⁽¹⁰⁾ La relazione scritta sotto è valida solo per $s\Delta$ piccolo rispetto ad uno, ed è giustificata dal fatto che in tale caso si può scrivere $1 - \exp[-s\Delta] \cong \cos t \cdot s\Delta$.

Coi valori sperimentali che l'espressione

$$\frac{(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)}{T + E_1 + E_2}$$

assume per $d = 0$ in corrispondenza dei vari valori di h è stata costruita la curva riportata nella fig. 5; l'effetto del fondo (cioè per $h = 0$) può essere attribuito in buona parte, come si vedrà nel seguito, a produzione di elettroni da parte di fotoni nelle pareti dei contatori.

L'andamento delle funzioni P_f e P_e è stato calcolato da ARLEY⁽¹¹⁾ per uno spettro di fotoni incidenti del tipo

$$F(K_0) dK_0 = \begin{cases} c \frac{dK_0}{K_0} & \text{per } 10 \text{ MeV} \leq K_0 \leq 150 \text{ MeV } (= E_c^{\text{aria}}) \\ c \left(\frac{150 \text{ MeV}}{K_0} \right)^{1.5} \frac{dK_0}{K_0} & \text{per } K_0 \geq 150 \text{ MeV}, \end{cases}$$

e per uno spettro di elettroni incidenti del tipo

$$F(E_0) dE_0 = \begin{cases} 10c \frac{dE_0}{200 \text{ MeV}} & \text{per } 0 \leq E_0 \leq 200 \text{ MeV}, \\ c \left(\frac{200 \text{ MeV}}{E_0} \right)^{2.5} dE_0 & \text{per } E_0 \geq 200 \text{ MeV}. \end{cases}$$

Le distribuzioni medie ottenute, indicate rispettivamente, come le indica ARLEY, con $\bar{P}_{ph}(\geq 1, l)$ e $P_{el}(\geq 1, l)$, in cui l è lo spessore di piombo attraversato misurato in unità di sciame, sono riportate nella fig. 6 insieme con l'andamento della funzione $\bar{P}_{ph}/\bar{P}_{el}$. Confrontando l'andamento della funzione $[(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)]/(T + E_1 + E_2)$ della fig. 5 (attribuendo per la maggior parte l'effetto di fondo a produzione di elettroni da fotoni nelle pareti dei contatori) con l'andamento della funzione P_{ph}/\bar{P}_{el} si nota un buon accordo fra le due curve per bassi valori di h , cioè per quei valori di h per i quali gli eventi $T + eE_1 + fE_2$ hanno minor peso.

Nella discussione che segue indicheremo con P_{ph} e \bar{P}_{el} i valori calcolati da ARLEY (fig. 6) e con P_f e P_e i valori sperimentali.

Per quanto si conosce attualmente sugli sciami, la distribuzione P_{el} non differisce notevolmente da quella sperimentale. Meno si conosce circa la \bar{P}_{ph} . Se ci riferiamo alla distribuzione nel caso di fotoni non appartenenti a sciami si ha un buon accordo fra i valori calcolati e quelli sperimentali^(6,7,11).

⁽¹¹⁾ N. ARLEY: *On the theory of stochastic processes and their application to the theory of cosmic rays* (Copenhagen, 1948), p. 165 e segg.

Un buon accordo si trova ⁽⁴⁾ anche nel caso di fotoni associati con almeno un'altra particella che colpisce un gruppo di contatori non schermati con

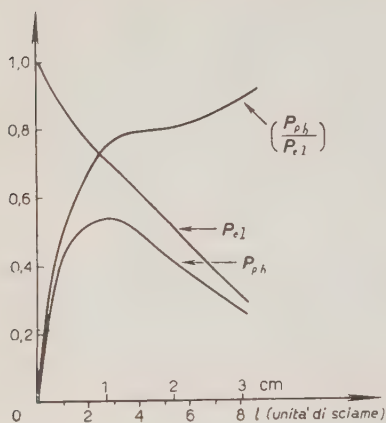


Fig. 6. - Andamento, in funzione di l , delle probabilità $\bar{P}_{ph} (> l)$ e $\bar{P}_{el} (> l)$ calcolate da ARLEY, e del rapporto $\bar{P}_{ph}/\bar{P}_{el}$ dedotto dalle prime due. \bar{P}_{ph} = probabilità di trovare sotto lo spessore l (in unità di scintillatore) di piombo almeno un elettrone prodotto da un fotone in l . \bar{P}_{el} = probabilità di trovare sotto lo spessore l almeno un elettrone quando sullo schermo giunge un elettrone. P_{ph} e \bar{P}_{el} sono calcolate per un determinato spettro di energia dei fotoni e degli elettroni incidenti.

confrontano separatamente la P_e e la $(f/e)P_f$ con le distribuzioni calcolate da ARLEY, si ricava l'andamento della funzione $(f/e)P_f/P_e$ e la si confronta con la $\bar{P}_{ph}/\bar{P}_{el}$.

5.2. a). P_e . - I valori sperimentali da confrontare coi valori P_{ee} sono stati dedotti dai rapporti $(T + E_1 + E_2)/(T + E_1)$ normalizzati in modo tale da avere, per $h = 0$, $[(T + E_1 + E_2)/(T + E_1)]_n = 1$. (La differenza fra $T + E_1$ e $T + E_1 + E_2$ per $h = 0$ sembra attribuibile in buona parte alla differenza fra l'angolo solido libero al di sopra di E_1 e l'angolo solido libero (da piombo) al di sopra di E_2). Quest'ultimo rapporto può essere espresso dalla relazione

$$(I) \quad \left[\frac{T + E_1 + E_2}{T + E_1} \right]_n = \frac{\int_0^\infty [\alpha(1 - \exp[-s\Delta h])] d\Delta}{\int_0^\infty [\alpha(1 - \exp[-s\Delta])] d\Delta}$$

superficie grande rispetto alla superficie del gruppo impiegato per rivelare i fotoni. Inoltre ARLEY trova che la \bar{P}_{ph} non varia molto col variare della forma dello spettro dei fotoni incidenti. Sembra quindi che si possa porre in via approssimativa: $\bar{P}_{ph} \cong P_f$; $P_{el} \cong P_e$. In questo caso l'accordo, per bassi valori di h , fra la curva $[(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)]/(T + E_1 + E_2) \cong (f/e)P_f/P_e$ (fig. 5) e la curva \bar{P}_{ph}/P_{el} (fig. 6) farebbe dedurre: $(f/e) \cong 1$. È questo un risultato approssimativo che si ricava direttamente dai dati sperimentali. La ripida salita della \bar{P}_{ph} per bassi valori di h (fig. 6) convalida l'ipotesi che l'effetto di fondo ($h = 0$) sia in buona parte attribuibile a produzione di elettroni da parte di fotoni nelle pareti dei contatori.

I valori per $d = 50$ saranno presi in considerazione in un secondo tempo.

5.2. Seconda approssimazione. - In questa seconda approssimazione si

Scrivendo Δh nella forma $\Delta(\Delta h/\Delta)$ ed assegnando successivamente al parametro $\Delta h/\Delta$ diversi valori, si è integrata graficamente la (1) la quale assume diversi valori in funzione del rapporto $\Delta h/\Delta$. Si è così ottenuta la curva $[(T + E_1 + E_2)/(T + E_1)]_n = F(\Delta h/\Delta)$ riportata nella fig. 7 la quale permette di dedurre dai vari valori che l'espressione $[(T + E_1 + E_2)/(T + E_1)]_n$ assume in corrispondenza dei vari valori di h , i relativi valori di $\Delta h/\Delta$. Questi valori devono però essere corretti perchè non sono da attribuire ad elettroni quegli eventi $T + E_1 + E_2$ in cui E_1 è colpito da un elettrone che non giunge fino ad E_2 mentre E_2 è colpito da un elettrone prodotto da un fotone, eventi che indichiamo con $T + e(E_1 - E_2) + fE_2$.

La correzione da apportare agli eventi $T + E_1 + E_2$ è dunque:

$$C_1 = T + e(E_1 - E_2) + fE_2 =$$

$$= K \int_0^{\infty} [\alpha \{1 - \exp[-s(\Delta - \Delta h)]\} \{1 - \exp[-s\delta h]\} d\Delta].$$

Questa correzione è leggermente in eccesso, dato che non tiene conto dei casi (veramente poco probabili) in cui un evento $T + e(E_1 - E_2) + fE_2$ avviene contemporaneamente ad un altro evento $T + E_1 + E_2$ dovuto realmente ad un elettrone. Questi casi possono essere espressi dalla relazione

$$C_2 = K \int_0^{\infty} [\alpha \{1 - \exp[-s(\Delta - \Delta h)]\} \{1 - \exp[-s\delta h]\} \{1 - \exp[-s\Delta h]\} d\Delta],$$

e la correzione totale risulta

$$C = C_1 - C_2 = K \int_0^{\infty} [\alpha \left(\exp \left[-s\Delta \frac{\Delta h}{\Delta} \right] - \exp[-s\Delta] \right) \left(1 - \exp \left[-s\Delta \frac{\delta h}{\Delta} \right] \right) d\Delta].$$

Per calcolare la correzione C , la quale assume un determinato valore in funzione del valore dello spessore h che si considera occorre però conoscere proprio la dipendenza da h delle funzioni $\Delta h/\Delta$ e $\delta h/\Delta$ che figurano nella espressione da integrare, e che sono le funzioni cercate. Poichè, come si vedrà nel seguito, la correzione risulta piccola, abbiamo assunto in prima approssimazione per $\Delta h/\Delta$ da sostituire nella espressione integranda i valori di $\Delta h/\Delta$

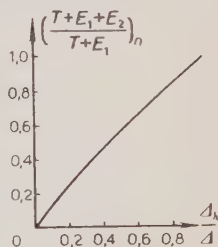


Fig. 7. - Andamento del rapporto $[(T + E_1 + E_2)/(T + E_1)]_n$ calcolati in funzione del rapporto $\Delta h/\Delta$ secondo la relazione (I) del testo.

non corretti. Per $\delta h/\Delta$ abbiamo assunto i valori che saranno ricavati nel successivo § 5.2.b). Abbiamo poi integrato graficamente la precedente espressione C per vari valori di h . Nella tabella II sono riportati i valori delle correzioni relative

$$C_r = \frac{C}{T + E_1 + E_2} = \frac{C}{K \int_0^\infty [\alpha] (1 - \exp[-s\Delta h]) d\Delta},$$

in funzione dei valori di h .

TABELLA II.

h (mm)	0	5	10	15	20	25	30
$C_r(h)$	0	0,03	0,07	0,10	0,12	0,14	0,16

Prendendo ora in considerazione i valori $[(T + E_1 + E_2)(1 - C_r)/(T + E_1)]_n$ in base al grafico della fig. 7 si ricavano i valori $\Delta h/\Delta$ definitivi che indicheremo con P_e e che sono riportati nel grafico della fig. 8 e nella tabella I. A questo risultato si giunge quasi direttamente dai valori sperimentali, in quanto le correzioni apportate per passare da $[(T + E_1 + E_2)/(T + E_1)]_n$ a P_e non sono grandi.

5.2.b). P_f . - I valori sperimentali da confrontare coi valori P_{fh} sono stati dedotti dai rapporti $[(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)]/(T + E_1)$ normalizzati in modo da tenere conto, approssimativamente, della differenza fra l'angolo solido libero al di sopra dello strato h di piombo nel quale avvengono i processi di produzione di elettroni da parte dei fotoni e l'angolo solido libero al di sopra di E_1 . In base alla disposizione geometrica (fig. 3) ed alla differenza fra i valori $T + E_1$ e $T - E_1 + E_2$ per $h = 0$ presi in considerazione nella precedente lettera a) si è scelto un fattore di normalizzazione eguale a 0,8 volte quello adoperato in a). Tenendo conto degli eventi $T + eE_1 + fE_2$, cioè del fatto che una anticoincidenza $(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)$ si verifica solo quando E_1 non è colpito da un elettrone si può scrivere

$$(II) \quad \left[\frac{(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)}{T + E_1} \right]_n = \frac{\int_0^\infty [\alpha] (\exp[-s\Delta]) \left(1 - \exp \left[-s\Delta \frac{\delta h}{\Delta} \right] \right) d\Delta}{\int_0^\infty [\alpha] (1 - \exp[-s\Delta]) d\Delta}$$

Il valore dell'integrale (II) è stato calcolato per diversi valori di $\delta h/\Delta$ e coi risultati è stato costruito il grafico riportato nella fig. 9. Esso permette di determinare in funzione dei valori che il 1° membro della (II) assume per i vari valori di h , i relativi valori di $\delta h/\Delta$. Questi valori sono riportati nel grafico della fig. 8 e sono indicati con $(f/e)P_e$, avendo posto $\delta h/\Delta = (f/e)P_f$. La curva $(f/e)P_f$ è di poco differente dalla \bar{P}_{ph} , il che dal punto di vista qualitativo mostra che l'andamento della P_f è simile a quello della \bar{P}_{ph} . L'accordo quantitativo della $(f/e)P_f$ con la P_{ph} è coerente con un rapporto $(f/e) \cong 1$. Anche qui si può osservare che a questo risultato si giunge quasi direttamente dai dati sperimentali, in quanto, come mostra la fig. 9, le correzioni apportate per passare da $[(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)/(T + E_1)]_n$ a $\delta h/\Delta$ non sono grandi.

5.2.c). (f/e) . - Confrontando il rapporto $(f/e)P_f/P_e$ (fig. 8) con il rapporto \bar{P}_{ph}/P_{e1} (fig. 6) si è portati a dedurre $(f/e) \cong 1$. I valori presi in considerazione fino ad ora si riferiscono alla misura per $d = 0$.

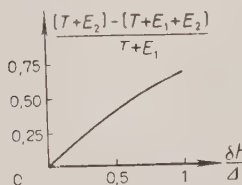


Fig. 9. - Andamento della espressione $[(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)/(T + E_1)]$ in funzione di $\delta h/\Delta$ calcolata in base alla relazione (II) del testo. δh = densità sotto lo spessore h , degli elettroni prodotti in h da fotoni.

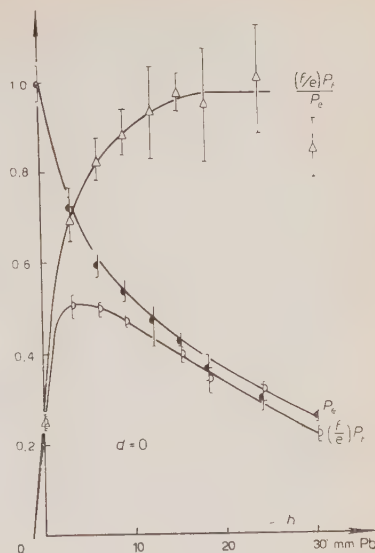


Fig. 8. - P_e = probabilità sperimentale di trovare almeno un elettrone sotto lo spessore h di piombo quando sul piombo incide un elettrone dello sciame. P_f = probabilità sperimentale di trovare almeno un elettrone sotto lo spessore h di piombo quando sul piombo incide un fotone dello sciame. f/e = rapporto fotoni/elettroni. Le curve sono relative al caso $d = 0$.

5.3. Il rapporto f/e nel caso $d = 50$ m. - Con procedimento analogo a quello tenuto nei §§ 5.1 e 5.2 si possono trarre informazioni sul rapporto f/e nel caso $d = 50$ m. Nella fig. 10 è riportato il grafico

$$\frac{(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)}{T + E_1 + E_2} \cong \frac{f}{e} \frac{P_f}{P_e}$$

(in prima approssimazione). Esso mostra che anche in questo caso f/e non

sembra molto diverso da uno. Per la seconda approssimazione osserviamo che, in base a quanto è stato premesso alla fine del § 2 circa il prodotto sA , la curva della fig. 9, relativa all'integrale (II) è adoperabile anche in questo caso. Anche per la correzione relativa $C/(T + E_1 + E_2)$ si possono adoperare

senza introdurre grossi errori i risultati della tab. II. Si ottengono per tale via i grafici P_e , $(f/e)P_f$; $(f/e)P_f/P_e$ riportati nella fig. 10. Anche per questa via si giunge ad un risultato $(f/e) \cong 1$.

L'andamento della curva relativa ai fotoni per $d = 50$ è un po' differente da quello nel caso $d = 0$. Abbiamo pensato perciò di eseguire delle misure di assorbimento dei fotoni, sia per $d = 0$ che per $d = 50$ al fine di trarre qualche informazione sulla energia dei fotoni registrati.

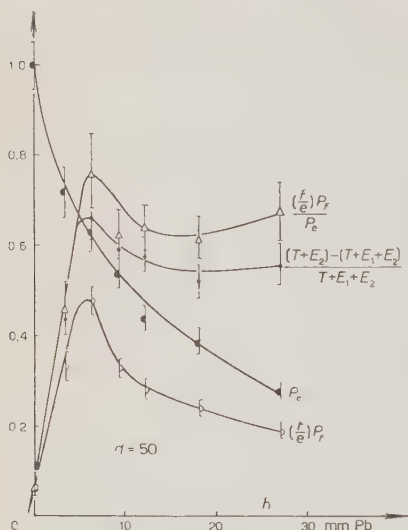


Fig. 10. - Andamento sperimentale delle funzioni $[(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)]/(T + E_1)P_e$; $(f/e)P_f$; $(f/e)P_f/P_e$, nel caso $d = 50$.

schermo fra E_1 ed E_2 sono state eseguite ponendo al di sopra del gruppo E_1 (fig. 3) degli strati di piombo di spessore h variabile, mentre fra E_1 ed E_2 era mantenuto uno strato di piombo di spessore h_0 costante. Tenendo conto dell'andamento delle curve P_f per $d = 0$ e per $d = 50$ si è scelto per h_0 un valore di 9 mm nelle misure in prossimità dell'asse ($d = 0$) e di 6 mm nel caso $d = 50$.

I risultati delle misure sono riportati nella tab. III.

Agli eventi $T + E_1$ e $T + E_1 + E_2$ registrati è stata apportata la correzione per le particelle penetranti. Sono stati attribuiti a fotoni gli eventi $(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)$ e sono stati calcolati i rapporti

$$\frac{(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)}{T} = F(h).$$

Col crescere di h il rapporto $F(h)/F(h = 0)$ decresce con legge approssimativamente esponenziale (fig. 11); il coefficiente di assorbimento in piombo risulta

6. - Assorbimento dei fotoni in piombo.

Delle misure di assorbimento dei fotoni che generano elettroni nello

TABELLA III.

$S_A = S_B = S_C = S_D = S = 0,3 \text{ m}^2$. $T = A + B + C$; $A + B + D$; $A + C + D$										
d (m)	$S_{E_1} =$ $S_{E_2} =$ (m^2)	h_0 fra E_1 ed E_2 (mm)	h pb sopra E_1 (mm)	Minuti	T	$T + E_2$ corretti dalle part. penetr.	$T + E_1 +$ E_2	$F(h) =$ $\frac{(T + E_2)}{T} -$ $\frac{(T + E_1 + E_2)}{T}$	$\frac{F(h)}{F(h=0)}$	μ (cm^{-1})
0	0,024	9	0	2 820	11 885	252	142	0,0093	$1,00 \pm 0,14$	$0,53 \pm 0,06$
			3	4 140	17 458	349	207	0,0081	$0,87 \pm 0,10$	
			6	7 135	30 837	650	428	0,0072	$0,77 \pm 0,08$	
			9	5 815	25 725	478	322	0,0060	$0,64 \pm 0,05$	
			15	7 130	29 165	385	265	0,0041	$0,44 \pm 0,02$	
			21	8 305	34 874	390	287	0,0030	$0,32 \pm 0,01$	
50	0,08	6	0	2 780	11 289	309	182	0,0113	$1,00 \pm 0,12$	$0,50 \pm 0,06$
			6	1 980	8 098	181	119	0,0077	$0,68 \pm 0,06$	
			12	2 070	8 305	176	126	0,0060	$0,53 \pm 0,04$	
			18	2 860	11 405	225	161	0,0056	$0,49 \pm 0,04$	
			24	4 320	16 425	230	172	0,0035	$0,31 \pm 0,02$	

di $0,53 \pm 0,06 \text{ cm}^{-1}$ per $d = 0$ e $0,50 \pm 0,06 \text{ cm}^{-1}$ per $d = 50$. Tenendo conto dell'andamento del coefficiente di assorbimento dei fotoni in funzione della loro energia ⁽¹²⁾ e dei risultati sperimentali di ROSENBLUM ⁽¹³⁾ il quale trova

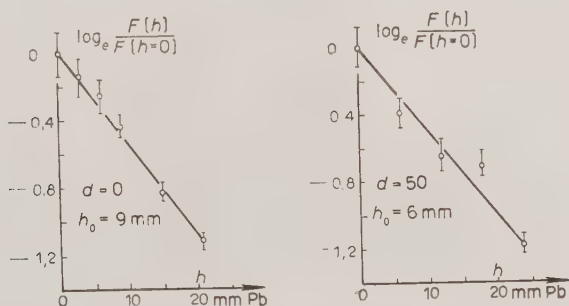


Fig. 11. - Andamento della funzione $\log_e F(h)/F(h=0)$ dalla quale si ricava il coefficiente di assorbimento in piombo dei fotoni degli sciami.

$F(h) = [(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)]/(T)$; h_0 = spessore di piombo fra E_1 ed E_2 .
 h = spessore dell'assorbente sopra E_1 .

⁽¹²⁾ C. M. DAVIDSON e R. D. EVANS: *Rev. Mod. Phys.*, **24**, 79 (1952).

⁽¹³⁾ E. S. ROSENBLUM: *Phys. Rev.*, **88** 612, (1952).

per fotoni artificiali con energia di 5,3; 10,3; e 17,6 MeV dei coefficienti di assorbimento in piombo rispettivamente di 0,5; 0,6 e 0,67 cm⁻¹ circa, si è portati a concludere che i fotoni registrati abbiano in buona percentuale energia piuttosto bassa (sotto i 10 MeV).

7. - Considerazioni sul dispositivo per rivelare i fotoni degli sciami.

Diverse misure preliminari, con differenti disposizioni sperimentali per rivelare i fotoni degli sciami, sono state eseguite prima di adottare il dispositivo rappresentato nella fig. 3. Quest'ultimo permette di assegnare ad E_1 una superficie $s \ll S$ senza avere frequenze proibitivamente basse e ad E_2 una superficie uguale a quella di E_1 . In questo modo i fotoni sono facilmente distinti dagli elettroni (§ 2.2) di modo che si può determinare quasi direttamente il valore di f/e , e si può ricavare l'andamento della funzione P_f . Senza i requisiti esposti ($s \ll S$, ecc.) l'effetto dei fotoni è facilmente mascherato dagli eventi del tipo $T + eE_1 + fE_2$ preponderanti rispetto agli eventi $T + fE_2$. In tale caso i dati sperimentali non permettono di ricavare la P_f , ed il rapporto f/e può essere determinato solo in base all'andamento \bar{P}_{ph} teorico e ad una percentuale di eventi $(T + E_2) - (T + E_1 + E_2)$ molto bassa rispetto agli eventi dovuti ad elettroni o ad elettroni e fotoni (3).

Misure ancora in corso mostrano che gli eventuali errori che col dispositivo della fig. 3 possono venire introdotti a causa della diffusione di particelle nelle pareti interne del collimatore di piombo, non sono tali da influire in modo sostanziale sul rapporto f/e , e sull'andamento della P_f .

8. - Conclusione.

Dalle presenti misure si ricava:

a) L'andamento della funzione P_f che rappresenta la probabilità di trovare sotto lo spessore h di piombo almeno un elettrone prodotto in h da un fotone dello sciame non differisce notevolmente, sia in prossimità dell'asse che a qualche decina di metri dall'asse dello sciame, dall'andamento P_{ph} calcolato da ARLEY. Da ciò non si può dedurre che lo spettro di energia dei fotoni negli sciami sia quello ammesso da ARLEY, poichè l'andamento della funzione \bar{P}_{ph} non varia notevolmente col variare della forma dello spettro dei fotoni incidenti.

b) Il rapporto fotoni/elettroni negli sciami selezionati sembra prossimo ad uno, sia a qualche metro che a qualche decina di metri dall'asse dello sciame.

c) Il coefficiente di assorbimento dei fotoni negli sciami selezionati risulta di circa 0,5 cm⁻¹ Pb, sia a qualche metro che a qualche decina di metri

dall'asse dello sciame. Tenendo conto dei valori del coefficiente di assorbimento dei fotoni in piombo in dipendenza della loro energia si deduce che nello spettro dei fotoni negli sciami selezionati una elevata percentuale ha energia inferiore ai 10 MeV.

Ringrazio il prof. GIUSEPPE COCCONI della Cornell University per i suoi utili consigli.

SUMMARY

The ratio $\frac{f}{e} = \frac{\text{density of the photons}}{\text{density of the electrons}}$ in the extensive cosmic-ray showers has been studied at Catania, 40 meters above sea level. The selected showers have the highest frequency per density $\Delta \simeq 2$ particles/m². The photons are detected by means of the method of the anticoincidences by detecting the electrons produced in an absorber of lead of thickness h variable from 0 to 30 mm. In order to have some information on the ratio f/e either near or far from the cores of the selected showers, two arrangements E , designed for detecting the photons and the electrons, were placed the former in the proximity of the counters that selected the showers ($d = 0$) and the latter 50 meters away ($d = 50$ m). The surface of the counters in the arrangement E was much smaller than the surface of the counters selecting the showers, so that the probability that an electron and a photon of a shower strikes at the same time the counters in arrangement E is very little. Avoiding in this way that the photons be disguised by the coherent electrons, information is deduced on the ratio f/e directly from the experimental results. By this way we find $f/e \simeq 1$ either for $d = 0$ or for $d = 50$ m (first approximation). We reach the same result including also the cases in which an electron and a photon of a shower strike at the same time the detector E (second approximation). Afterwards we determine the behaviour of the probability P_f of finding below a thickness h of lead at least an electron produced by a photon of a shower. The behaviour of the function P_f , either for $d = 0$ or for $d = 50$ m, is not very different from the behaviour of the function \bar{P}_{ph} calculated by ARLEY assuming a determined energy spectrum of the incoming photons. At last we determine the coefficient of absorption of the photons in the showers and we find $\mu = 0,53 \pm 0,06 \text{ cm}^{-1} \text{ Pb}$ for $d = 0$, and $\mu = 0,50 \pm 0,06 \text{ cm}^{-1} \text{ Pb}$ for $d = 50$ m. From these values of μ we deduce that a high percentage of the photons in the selected showers have an energy lower than 10 MeV either for $d = 0$ or for $d = 50$ m.

Altitude and Geomagnetic Effects of Positive and Negative Penetrating Particles of Cosmic Radiation.

I. F. QUERCIA and B. RISPOLI

Istituto di Fisica dell'Università - Roma
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Roma

(ricevuto il 16 Giugno 1953)

Summary. — Experiments performed on positive and negative penetrating particles of cosmic radiation at various altitudes and at different zenithal and azimuthal angles are described. The aim of these experiments was to get informations on meson production processes. Positive excess, EW-asymmetry, NS-asymmetry and zenital distributions for different energies and at different altitudes have been measured. All data collected have been compared with theoretical results of a plural production of mesons. Experimental results cannot be considered in disagreement with the theory.

1. — Introduction.

Present work is concerning with the results of measurements performed in the past years on positive and negative particles in the penetrating component of cosmic radiation. Some of these results have been reported in preceding papers ⁽¹⁾ ⁽²⁾. The first aim of our experiments was getting information on positive excess of μ -mesons at various altitudes and zenithal and azimuthal angles. The second one was getting information on azimuthal asymmetries, and zenithal distribution of penetrating particles. All data collected are suitable to be compared with various theories of meson production by the primary cosmic radiation.

⁽¹⁾ I. F. QUERCIA, B. RISPOLI and S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, **4**, 283 (1947); **5**, 397 (1948); **7**, 277 (1950); **10**, 357 (1953).

⁽²⁾ I. F. QUERCIA, B. RISPOLI and S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 715 (1950).

2. - First experiment.

In a first set of measurements we used the experimental arrangement of fig. 1, described in a previous note (²). Two iron blocks are magnetized by means of a direct current; the paths of charged particles which cross the ap-

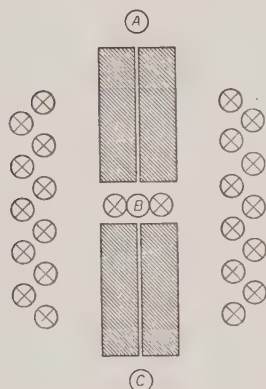


Fig. 1. - Experimental arrangement used in 1st experiment.

paratus being deflected by the magnetic field. A telescope of three 4×52 cm² counters A, B, C records the charged particles crossing the iron blocks. According to the direction of magnetic field are focused in the telescope the positive or negative particles, with momentum lower than 2 GeV/c together with a background of higher momentum particles of both signs.

In the measurements at 3500 m the apparatus was surrounded by anticoincidence counters in order to prevent spurious counts due to side showers while during measurements taken at other altitudes in airplane flights two blocks of 5 cm Pb took place on both sides of counter B. The telescope

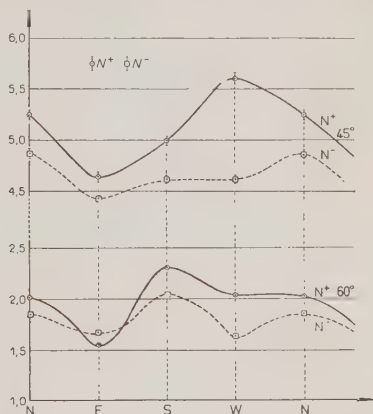


Fig. 2. - Azimuthal distributions at 45° and 60° at 3500 m above sea level.

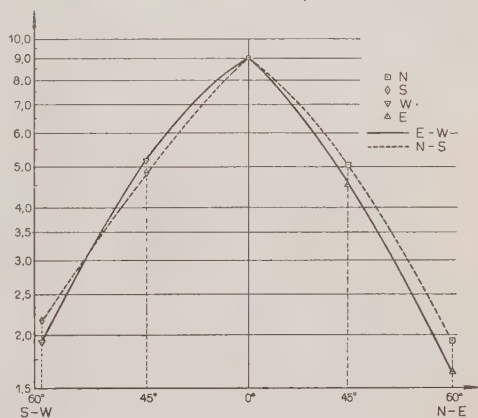


Fig. 3. - Zenithal distribution of total penetrating component ($E > 0.53$ GeV for mesons) in North-South and East-West planes at 3500 m above sea level.

TABLE I. - *Altitude dependence.*

Altitude m a.s.l.	N^+	N^-	ε	N
0	5.71 ± 0.20	5.28 ± 0.08	1.08 ± 0.01	5.49 ± 0.10
3 500	9.56 ± 0.08	8.45 ± 0.07	1.13 ± 0.01	9.01 ± 0.05
5 100	16.0 ± 0.9	14.0 ± 0.3	1.14 ± 0.07	15.0 ± 0.5
7 300	20.8 ± 0.4	18.5 ± 0.6	1.12 ± 0.04	19.6 ± 0.4

could tilt about an horizontal axis, so that it could be pointed at various zenithal angles. With this apparatus we have performed some measurements

in vertical direction at sea level, at 3 500 m, at 5 100 m, at 7 300 m and at various zenithal and azimuthal angles at 3 500 m ⁽³⁾.

In following N^+ (N^-) refers to counting rate per minute of three-fold coincidences (ABC) when positive (negative) particles are focused, ε the ratio N^+/N^- , N the average value $(N^+ + N^-)/2$.

In table I are reported the results of vertical measurements at various altitudes. The results obtained in inclined directions at 3 500 m above sea level, and values averaged over the 4 azimuthal directions are reported in table II.

Standard errors are indicated in the tables. N^+ and N^- at 45° and 60° vs/azimuth are drawn in fig. 2. In fig. 3 and 4 the zenithal dependences are plotted.

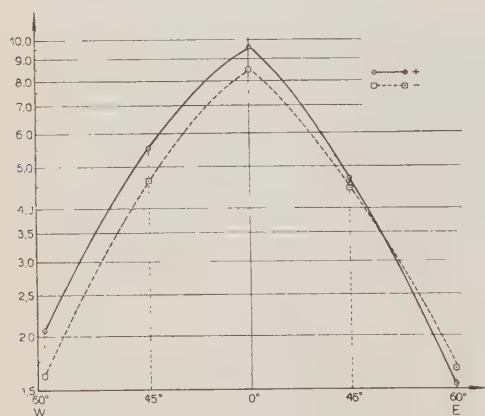


Fig. 4. - Zenithal distribution of positive and negative particles in East-West plan at 3 500 m above sea level.

(³) Some results have been already referred in papers indicated in (¹).

TABLE II. — *Azimuthal and zenithal dependence at 3500 m.*

Zenith angle	Azimuth	N^+	N^-	ϵ	N
45°	N	5.26 ± 0.05	4.88 ± 0.05	1.08 ± 0.01	5.07 ± 0.04
	E	4.64 ± 0.05	4.43 ± 0.03	1.05 ± 0.01	4.54 ± 0.03
	S	5.00 ± 0.05	5.63 ± 0.05	1.10 ± 0.01	4.82 ± 0.04
	W	5.61 ± 0.05	4.62 ± 0.04	1.21 ± 0.02	5.12 ± 0.03
	average	5.13 ± 0.02	4.64 ± 0.02	1.108 ± 0.007	4.88 ± 0.01
60°	N	2.01 ± 0.02	1.85 ± 0.01	1.09 ± 0.01	1.93 ± 0.01
	E	1.55 ± 0.01	1.67 ± 0.01	0.928 ± 0.008	1.610 ± 0.007
	S	2.29 ± 0.02	2.04 ± 0.02	1.11 ± 0.01	2.17 ± 0.01
	W	2.03 ± 0.02	1.62 ± 0.01	1.25 ± 0.01	1.82 ± 0.01
	average	1.970 ± 0.009	1.795 ± 0.008	1.098 ± 0.007	1.883 ± 0.006

3. — Second experiment.

In order to improve the selection of positive and negative mesons the apparatus has been modified as shown by fig. 5.

The counters A, B, C were 2×40 cm² sensitive area, both magnetic lenses were the same used in the first experiment; a lead absorber 20 cm thick was added under the second iron block. Instead of counters A, B, C there were three sets of 5 2×40 cm² counters and a set D of 9 4×95 cm² counters was added under lead.

Following three-fold coincidences were formed: ($A_1B_1C_1$), ($A_2B_2C_2$), ($A_3B_3C_3$), ($A_4B_4C_4$). Because of the magnetic field in iron, symmetrical telescopes 1 and 3 record only particles of one sign and telescopes 2 and 4 record particles of opposite sign. We shall refer the counting rates per hour of positive and negative particles recorded by these three-fold coincidences as M_3^\pm . Corresponding fourfold coincidences with parallel counters D will be indicated as M_4^\pm . Pulses of central counters of each set, i.e. $A_0, A_2, A_4; B_0, B_2, B_4; C_0, C_2, C_4$, are mixed in order to form a «three-fold central coincidence» ($A_{024}B_{013}C_{024}$) and a «fourfold

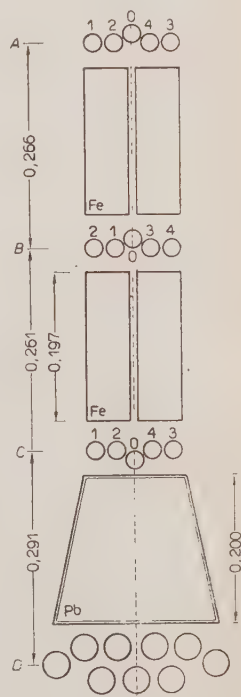


Fig. 5. — Experimental arrangement used in 2nd experiment.

central coincidence » ($A_{024}B_{013}C_{024}D$). We shall refer the corresponding counting rates per minute as N_3^+ and N_4^+ .

It should be noted that in this case each set of central counters works as counters A, B, C in first experiment. By means of anticoincidence circuits no counts were recorded in all 3-fold and 4-fold coincidence channel when more than one counter in each of the sets A, B, C was triggered.

Measurements have been taken in Rome, at sea level, under a thin roof of wood at $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ zenithal angles in East-West plane, and at $30^\circ, 45^\circ$ in North-South plane. Zenithal and azimuthal directions and the direction of the magnetic field were frequently changed at random during the running of measurements.

The experimental results concerning central coincidences are summarized

TABLE III. — Central 3-fold coincidences at sea level.

Zenith angle	Azimuth directions	N_3^+	N_3^-	ϵ	N
0°		6.55 ± 0.05	5.87 ± 0.07	1.12 ± 0.01	6.21 ± 0.04
15°	E	5.97 ± 0.05	5.33 ± 0.05	1.12 ± 0.01	5.65 ± 0.04
	W	5.94 ± 0.06	5.43 ± 0.05	1.09 ± 0.01	5.68 ± 0.04
	Average	6.55 ± 0.05	5.87 ± 0.07	1.11 ± 0.01	5.67 ± 0.03
30°	E	4.63 ± 0.05	4.06 ± 0.05	1.14 ± 0.02	4.35 ± 0.04
	W	4.75 ± 0.05	4.41 ± 0.05	1.08 ± 0.02	4.58 ± 0.04
	Aver. EW	4.69 ± 0.04	4.23 ± 0.04	1.11 ± 0.01	4.47 ± 0.03
	N	4.79 ± 0.07	4.51 ± 0.09	1.06 ± 0.03	4.66 ± 0.06
	SZ	4.88 ± 0.06	4.33 ± 0.08	1.13 ± 0.02	4.60 ± 0.05
	Aver. NS	4.84 ± 0.05	4.42 ± 0.06	1.09 ± 0.02	4.61 ± 0.04
45°	E	3.07 ± 0.03	2.98 ± 0.03	1.03 ± 0.01	3.02 ± 0.02
	W	3.22 ± 0.02	2.75 ± 0.03	1.18 ± 0.01	2.98 ± 0.02
	Aver. EW	3.15 ± 0.02	2.87 ± 0.02	1.10 ± 0.01	3.00 ± 0.01
	N	3.25 ± 0.03	3.18 ± 0.03	1.02 ± 0.01	3.21 ± 0.02
	S	3.38 ± 0.03	3.20 ± 0.03	1.06 ± 0.01	3.28 ± 0.02
	Aver. NS	3.32 ± 0.02	3.19 ± 0.02	1.04 ± 0.01	3.26 ± 0.01
60°	E	1.36 ± 0.01	1.44 ± 0.01	0.95 ± 0.01	1.40 ± 0.01
	W	1.57 ± 0.02	1.24 ± 0.01	1.27 ± 0.02	1.41 ± 0.01
	Aver. EW	1.47 ± 0.01	1.34 ± 0.01	1.10 ± 0.01	1.41 ± 0.01

(¹) During the running of 45° N-S measurements there were some troubles in 4-fold coincidence circuits so that only 3-fold data are reliable.

TABLE IV. - Central 4-fold coincidences at sea level.

Zenith angle	Azimuth directions	N_4^+	N_4^-	ε	N
0°	D	5.65 ± 0.05	5.12 ± 0.02	1.10 ± 0.02	5.38 ± 0.03
15°	E	5.02 ± 0.05	4.48 ± 0.05	1.12 ± 0.02	4.75 ± 0.04
	W	5.07 ± 0.05	4.61 ± 0.05	1.10 ± 0.01	4.84 ± 0.04
	Aver. EW	5.05 ± 0.04	4.55 ± 0.04	1.11 ± 0.01	4.90 ± 0.03
30°	E	3.96 ± 0.05	3.52 ± 0.05	1.13 ± 0.02	3.74 ± 0.04
	W	4.08 ± 0.05	3.83 ± 0.04	1.07 ± 0.02	3.96 ± 0.03
	Aver. EW	4.02 ± 0.04	3.67 ± 0.03	1.10 ± 0.02	3.85 ± 0.03
	N	4.05 ± 0.07	3.89 ± 0.08	1.04 ± 0.03	3.97 ± 0.05
	S	4.16 ± 0.05	3.74 ± 0.09	1.11 ± 0.03	3.95 ± 0.04
	Aver. NS	4.11 ± 0.04	3.82 ± 0.06	1.08 ± 0.02	3.97 ± 0.03
45°	E	2.78 ± 0.03	2.72 ± 0.03	1.02 ± 0.02	2.75 ± 0.02
	W	2.85 ± 0.02	2.52 ± 0.02	1.10 ± 0.01	2.69 ± 0.01
	Aver. EW	2.82 ± 0.02	1.62 ± 0.02	1.06 ± 0.01	2.72 ± 0.01
60°	E	1.27 ± 0.01	1.32 ± 0.01	0.96 ± 0.01	1.29 ± 0.01
	W	1.42 ± 0.02	1.17 ± 0.01	1.22 ± 0.02	1.29 ± 0.01
	Aver. EW	1.35 ± 0.01	1.25 ± 0.01	1.08 ± 0.01	1.30 ± 0.01

in tables III, IV, V respectively for 3-fold, 4-fold (⁴) and their differences. In the tables we indicate with ε the ratios $+/-$ and with N the averaged value $\frac{1}{2}(N^+ + N^-)$. All intensities are per minute. Averaged values in NS and EW planes are also indicated. The fig. 6 shows the azimuthal dependences of N_3 at 30° and 45° at sea level.

The results of M -coincidences (3-fold M_3 and 4-fold M_4) are summarized in tables VI and VII, the indicated numbers being the counts per hour; ε is the ratio $+/-$ and $M = \frac{1}{2}(M^+ + M^-)$; Aver. EW, Aver. NS are the averaged values in EW and NS planes. Zenithal distribution of M_3 in East-West plane is shown in fig. 7.

Zenithal distributions of all coincidences at sea level are summarized in table VIII where $\mathcal{N} = N(\theta)/N(0)$ and $\mathcal{M} = M(\theta)/M(0)$.

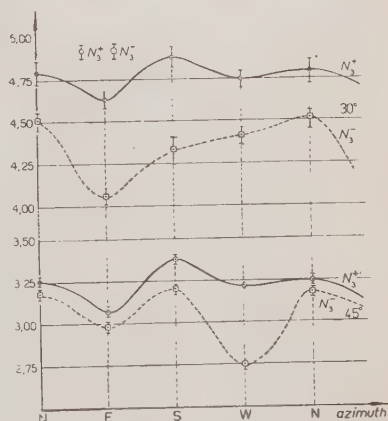


Fig. 6. - Azimuthal distributions at 30° and 45° at sea level.

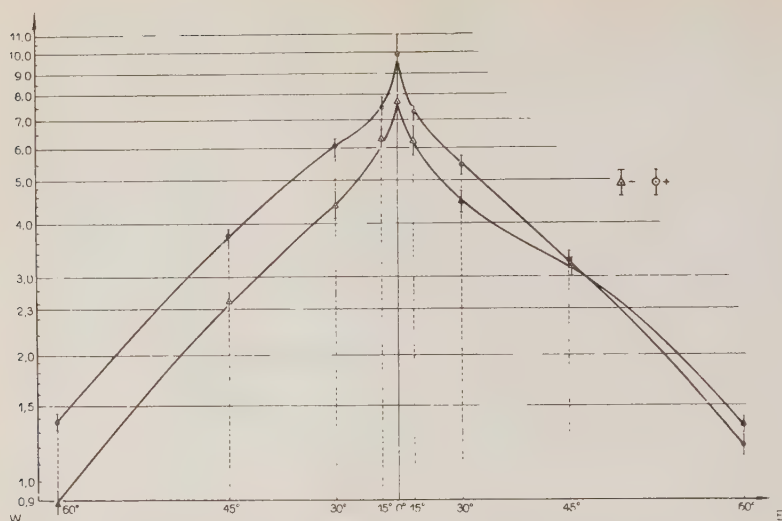


Fig. 7. - Zenithal distributions of positive and negative mesons at sea level.

TABLE V. - Central anticoincidences 3-4-fold at sea level.

Zenith angle	Azimuth directions	$N_3^+ - N_4^+$	$N_3^- - N_4^-$	ε	$N_3 - N_4$
0°		0.90 ± 0.02	0.75 ± 0.02	1.22 ± 0.05	0.83 ± 0.01
15°	E	0.95 ± 0.02	0.85 ± 0.02	1.12 ± 0.04	0.90 ± 0.01
	W	0.86 ± 0.02	0.83 ± 0.02	1.04 ± 0.03	0.85 ± 0.02
	Aver. EW	0.90 ± 0.01	0.84 ± 0.01	1.07 ± 0.02	0.87 ± 0.01
30°	E	0.67 ± 0.02	0.54 ± 0.02	1.24 ± 0.05	0.60 ± 0.01
	W	0.67 ± 0.02	0.58 ± 0.02	1.16 ± 0.04	0.63 ± 0.01
	Aver. EW	0.67 ± 0.01	0.56 ± 0.01	1.20 ± 0.02	0.62 ± 0.01
	N	0.74 ± 0.03	0.62 ± 0.03	1.20 ± 0.08	0.68 ± 0.02
	S	0.72 ± 0.02	0.59 ± 0.03	1.22 ± 0.06	0.65 ± 0.02
	Aver. NS	0.73 ± 0.02	0.61 ± 0.02	1.20 ± 0.03	0.67 ± 0.03
45°	E	0.30 ± 0.01	0.26 ± 0.01	1.15 ± 0.02	0.280 ± 0.008
	W	0.37 ± 0.01	0.23 ± 0.01	1.61 ± 0.10	0.300 ± 0.007
	Aver. EW	0.335 ± 0.008	0.245 ± 0.008	1.37 ± 0.05	0.290 ± 0.006
60°	E	0.092 ± 0.003	0.118 ± 0.004	0.78 ± 0.04	0.105 ± 0.003
	W	0.159 ± 0.005	0.073 ± 0.003	2.17 ± 0.11	0.116 ± 0.003
	Aver. EW	0.125 ± 0.003	0.096 ± 0.003	1.31 ± 0.06	0.110 ± 0.002

4. - Interpretation of the results.

We will discuss separately: *a)* data collected in the first experiment and in central coincidences of the second one, *b)* data collected in three-fold and four-fold *M*-coincidences of second experiment.

a) Counting rates N are due to the following events:

1) *Chance coincidences.* These events being less than 0.2% of the three-fold coincidences rate, in any experimental condition, will be neglected.

2) *Knock-on electrons.* Supposing average momentum of meson component in vertical direction at sea level being 3500 MeV/c we find knock-on electrons to be about 10% of mesons. At higher altitude this number would be less because of decreasing average meson energy. For that reason about 10% of counting rates N^\pm , N at 0; 5100; 7300 m referred in Table I, are due to knock-on electrons. On the contrary contribution of knock-on to counting rates at 3500 m referred in Tables I, II is negligible; in this case

TABLE VI. -- M_3 coincidences.

Zenith angle	Azimuth directions	M_3^+	M_3^-	ε	M_3
0°		9.81 ± 0.29	7.67 ± 0.24	1.28 ± 0.05	8.74 ± 0.19
30°	E	7.18 ± 0.34	6.17 ± 0.50	1.16 ± 0.09	6.67 ± 0.25
	W	7.43 ± 0.32	6.26 ± 0.29	1.19 ± 0.08	6.85 ± 0.22
	Aver. EW	7.31 ± 0.16	6.22 ± 0.21	1.18 ± 0.04	6.76 ± 0.13
30°	E	5.40 ± 0.30	4.44 ± 0.26	1.22 ± 0.10	4.92 ± 0.20
	W	6.04 ± 0.32	4.39 ± 0.28	1.38 ± 0.12	5.22 ± 0.21
	Aver. EW	5.72 ± 0.21	4.42 ± 0.19	1.30 ± 0.07	5.07 ± 0.14
	W	6.85 ± 0.40	5.39 ± 0.36	1.27 ± 0.10	6.12 ± 0.24
	S	5.45 ± 0.39	4.70 ± 0.35	1.16 ± 0.12	5.08 ± 0.26
	Aver. NS	6.15 ± 0.28	5.04 ± 0.25	1.22 ± 0.08	5.60 ± 0.19
45°	E	3.25 ± 0.15	3.18 ± 0.15	1.02 ± 0.06	3.22 ± 0.11
	W	3.69 ± 0.15	2.63 ± 0.12	1.40 ± 0.09	3.16 ± 0.10
	Aver. EW	3.47 ± 0.11	2.91 ± 0.10	1.19 ± 0.05	3.19 ± 0.08
	N	3.78 ± 0.15	2.78 ± 0.13	1.36 ± 0.08	3.28 ± 0.10
	S	3.62 ± 0.16	2.85 ± 0.14	1.27 ± 0.08	3.24 ± 0.11
	Aver. NS	3.70 ± 0.11	2.82 ± 0.10	1.31 ± 0.06	3.26 ± 0.07
60°	E	1.20 ± 0.07	1.35 ± 0.07	0.89 ± 0.07	1.28 ± 0.05
	W	1.38 ± 0.06	0.89 ± 0.06	1.55 ± 0.12	1.14 ± 0.05
	Aver. EW	1.41 ± 0.05	1.17 ± 0.05	1.21 ± 0.05	1.29 ± 0.04

indeed no counts were recorded when meson accompanied by electrons crossed set *B* (fig. 1). That decrease in counting rate compensates almost exactly the contribution due to knock-on electrons in counter *C*.

TABLE VII. — M_4 coincidences at sea level.

Zenith angle	Azimuth directions	M_4^+	M_4^-	ε	M_4
0°		5.20 ± 0.22	4.57 ± 0.18	1.14 ± 0.08	4.89 ± 0.14
15°	E	3.52 ± 0.23	3.22 ± 0.22	1.09 ± 0.09	3.37 ± 0.16
	W	3.94 ± 0.23	2.79 ± 0.23	1.04 ± 0.08	3.87 ± 0.16
	Aver. EW	3.73 ± 0.16	3.51 ± 0.16	1.06 ± 0.07	3.62 ± 0.11
39°	E	3.70 ± 0.29	2.82 ± 0.21	1.31 ± 0.14	3.26 ± 0.18
	W	4.17 ± 0.26	3.02 ± 0.22	1.38 ± 0.13	3.60 ± 0.17
	Aver. EW	3.94 ± 0.20	2.90 ± 0.16	1.36 ± 0.10	3.42 ± 0.13
	N	3.33 ± 0.28	2.90 ± 0.26	1.15 ± 0.14	3.12 ± 0.19
	S	3.00 ± 0.28	2.53 ± 0.26	1.19 ± 0.07	2.77 ± 0.18
	Aver. NS	3.17 ± 0.19	2.71 ± 0.18	1.18 ± 0.10	2.94 ± 0.17
45°	E	1.91 ± 0.12	1.76 ± 0.11	1.08 ± 0.09	1.84 ± 0.08
	W	2.31 ± 0.12	1.35 ± 0.09	1.71 ± 0.15	1.83 ± 0.07
	Aver. EW	2.11 ± 0.09	1.56 ± 0.07	1.35 ± 0.08	1.84 ± 0.06
	N	1.95 ± 0.11	1.50 ± 0.10	1.30 ± 0.11	1.73 ± 0.07
	S	2.12 ± 0.12	1.31 ± 0.10	1.62 ± 0.15	1.72 ± 0.08
	Aver. NS	2.04 ± 0.08	1.40 ± 0.07	1.45 ± 0.09	1.72 ± 0.04
60°	E	0.87 ± 0.06	0.89 ± 0.06	0.98 ± 0.09	0.88 ± 0.04
	W	0.84 ± 0.06	0.65 ± 0.05	1.29 ± 0.13	0.75 ± 0.04
	Aver. EW	0.86 ± 0.04	0.77 ± 0.04	1.12 ± 0.08	0.81 ± 0.03

TABLE VIII. — Zenithal distributions at sea level.

Zenith angle	Azimuthal directions	\mathcal{N}_3	\mathcal{N}_4	\mathcal{N}_{3-4}	\mathcal{M}_3	\mathcal{M}_4
15°	EW	0.915 ± 0.008	0.892 ± 0.008	1.050 ± 0.020	0.774 ± 0.022	0.740 ± 0.031
30°	EW	0.720 ± 0.007	0.715 ± 0.007	0.745 ± 0.015	0.580 ± 0.020	0.700 ± 0.030
	NS	0.743 ± 0.008	0.736 ± 0.007	0.806 ± 0.009	0.641 ± 0.026	0.602 ± 0.039
45°	EW	0.484 ± 0.004	0.505 ± 0.003	0.350 ± 0.008	0.365 ± 0.012	0.377 ± 0.017
	NS	0.522 ± 0.004	—	—	0.375 ± 0.012	0.352 ± 0.013
60°	EW	0.227 ± 0.002	0.241 ± 0.002	0.133 ± 0.003	0.148 ± 0.006	0.166 ± 0.008

In second experiment instead, because of anticoincidence both in set B and C , compensation is not realized so that a meson accompanied by electrons in set B or/and C is not counted. We estimate that for this reason in vertical direction about 20% of mesons are missed. Measurements in vertical direction have been taken without magnetic field and measured intensity was found to be 16% less than value calculated from Rossi's ⁽⁵⁾ spectrum.

When apparatus is inclined the relative number of knock-on electrons would become a little larger as average momentum of meson spectrum increases. Therefore the number of unrecorded mesons is expected to be greater than 16% at large zenithal angles. However ratios $N(\theta)/N_0$ referred in Table VIII are only slightly affected by this effect.

Differences of threefold and fourfold counting rates are lowered only by 1% or less from knock-on's anticoincidences because average momentum of recorded mesons is rather small.

3) *Side showers.* In all situations anticoincidences arrangements prevented spurious counting due to side showers with high efficiency. Both from calculation and from test measurements we have drawn the conclusion that no correction is needed for taking into account side showers. In airplane measurements, where apparatus was protected against side shower only by a lead surrounding counter B , a small percent of counting rates could be due to side showers.

4) *Protons.* Protons of momentum less than 1500 MeV/c are not allowed to cross the apparatus and we shall show in the following that magnetic field is unable to converge particles whose momentum exceeds this value. Therefore protons do not affect appreciably ratios N^+/N^- while an unknown contribution is given to counting rates, above all in vertical direction at high altitudes. Unfortunately lack of reliable data on proton intensity make us unable to calculate that contribution. However it is worth-while observing that zenithal distribution of protons is confined in a narrow cone close to the vertical direction, so that a very small contribution is expected from protons at large zenithal angles.

5) *Mesons.* Recorded coincidences in both experiments refer to particles whose range is greater than 314.4 g/cm² of iron + 4.5 g/cm² of brass for threefold and an additional range of 266 g/cm² of lead is required for fourfold. Taking into account inclined trajectories inside iron, minimum average range should be increased of about 4% ⁽⁶⁾. Confining our attention only

⁽⁵⁾ B. ROSSI: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 537 (1948).

⁽⁶⁾ K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **61**, 212 (1942).

on μ -mesons, the minimum energy is 530 MeV for 3-fold, and 750 MeV for 4-fold coincidences. Energy range of mesons stopped in lead comes to be between 530 and 750 MeV.

Counting rates N_3 and N_4 for 3-fold and 4-fold coincidences are given by:

$$N^+ = \int_{E_{\min}}^{\infty} n^+(E) I_c(E) dE + \int_{E_{\min}}^{\infty} n^-(E) I_d(E) dE,$$

$$N^- = \int_{E_{\min}}^{\infty} n^-(E) I_c(E) dE + \int_{E_{\min}}^{\infty} n^+(E) I_d(E) dE,$$

where $n^+(E)$, $n^-(E)$ are meson differential spectra and $I_c(E)$, $I_d(E)$ are given in (2) and depend from the ratio r/B , r being radius of counters and B the magnetic field.

For differences (3-fold) — (4-fold) counting rates are given by:

$$N_3^+ - N_4^+ = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} n^+(E) I_c(E) dE \propto \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} n^+(E) dE,$$

$$N_3^- - N_4^- = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} n^-(E) I_c dE \propto \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} n^-(E) dE,$$

because $I_d = 0$ and $I_c = \text{const}$, for $E \leq 700$ MeV, so that ratio $\varepsilon_{3-4} = \frac{N_3^+ - N_4^+}{N_3^- - N_4^-}$ yields directly the positive to negative ratio η , while ε_3 and ε_4 are somewhat less than η because complete separation of positive and negative particles takes place only for $E < 700$ MeV⁽⁷⁾ while for $E > 700$ MeV the efficiency of apparatus in separating particles of different sign decreases as energy increases and becomes very small for $E > 2$ GeV.

If differential meson spectra in all situation were known, it would be possible to calculate positive excess η from experimental ratios ε . Unfortunately reliable data are available only in vertical direction at sea level.

(7) In first experiment the ratio r/B between radius of counters and magnetic field was less of a factor 1,15 with respect to the second experiment and consequently the upper limit in separating particles of both sign was raised to about 900 MeV.

b) Counting rates M of second experiment are due to the following events:

- 1) Side showers;
- 2) Chance coincidences;
- 3) Knock-on electrons;
- 4) μ -mesons scattered inside iron;
- 5) μ -mesons (positive and negative) deflected by magnetic field.

We will discuss contribution of spurious events 1), 2), 3) and 4) given to counting rates M .

We shall suppose events 1) and 2) not being correlated with geometrical positions of counters. In order to measure contribution given by these events we have performed «back ground measurements» counting without magnetic field, the coincidences $(A_1B_3C_1) - (A_2B_4C_2)$ and $(A_2B_4C_2) \pm (A_2B_1C_3)$. In these measurements, as shown by fig. 5, the angle between the axis of telescope AB , BC was increased. Counting rates of these measurements in vertical direction were found to be ⁽⁸⁾:

$$F_3 = 0.20 \pm 0.10 \text{ h}^{-1} \quad \text{for} \quad 3\text{-fold},$$

$$F_4 = 0.13 \pm 0.10 \text{ h}^{-1} \quad \text{for} \quad 4\text{-fold}.$$

Chance coincidences calculated from time resolution of electronics and from intensity of double coincidences and from single pulses of a counter, were found to be, in vertical direction:

$$C_3 = 0.08 \text{ h}^{-1},$$

whereas in inclined direction chance coincidences should be

$$C_3(\theta) = 0.08 \cos^2 \theta \text{ h}^{-1},$$

if a $\cos^2 \theta$ law is assumed for zenithal distribution of penetrating component.

Therefore counting rates per hour of «background measurements» would not exceed the value:

$$F_3(\theta) = 0.12 + 0.08 \cos^2 \theta,$$

⁽⁸⁾ It should be noted that these measurements have been taken with an anti-coincidence arrangement of lower efficiency than that used in the experiment; therefore referred data may be considered as an upper limit.

for 3-fold and the constant value

$$F_4 = 0.13$$

for 4-fold where chance coincidences are negligible.

In order to evaluate contributions of events 3) and 4) measurements without magnetic field have been performed at 45° and in vertical direction. We shall call M_3^0 and M_4^0 the corresponding frequencies which are given in Table IX.

TABLE IX. - *Background measurements.*

	M_3^0	M_4^0
0°	2.87 ± 0.33	1.35 ± 0.26
45°	0.97 ± 0.13	0.52 ± 0.15

Multiple scattering in iron should not give any contribution to M_4^0 ; mesons recorded as M_4 have an energy greater than 750 MeV and mean scattering angle is roughly one tenth of deflection due to magnetic field; therefore events M_4^0 should be only due to knock-on electrons in spite of anticoincidence. It is reasonable to consider that contribution of knock-on electrons due to low energy mesons is very small. We can conclude from these arguments that contributions given to M_3^0 should be:

$$\text{knock-on: } 1.35 \text{ h}^{-1}, \quad \text{scattered mesons: } 1.52 \text{ h}^{-1}$$

in vertical direction and:

$$\text{knock-on: } 0.52 \text{ h}^{-1}, \quad \text{scattered mesons: } 0.45 \text{ h}^{-1}$$

at 45° .

These data can be used in order to calculate the contribution of knock-on electrons to M_3^\pm and M_4^\pm . Because of the magnetic field coincidences M_3^\pm are due only to mesons whose energy is between 0.5 and 1.9 GeV (mean energy 0.9 GeV); knock-on electrons generated by these mesons are about 1/8 of total number of knock-on's and contribution given to M_3^\pm is lower than 1%, and it will be neglected. On the contrary mesons of energy greater than 1.9 GeV are weakly deflected by magnetic field and therefore we can conclude that the 7/8 of knock-on's contribution to M_3^0 should give a contribution to M_3^\pm and M_4^\pm . This contribution was calculated by extrapolating the results obtained at 0° and 45° with a $\cos^2 \theta$ law; the calculated contribution is reported in Table X.

TABLE X. — Contribution given by knock-on electrons to M_3^\pm , M_4^\pm .

	0°	15°	30°	45°	60°
Intensity h^{-1}	1.20	1.11	0.90	0.60	0.30

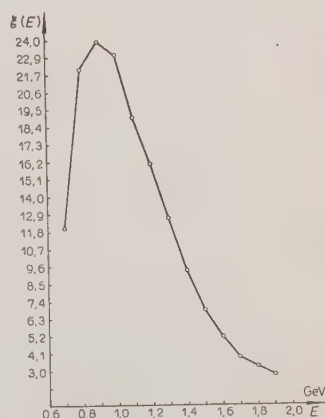
We will now discuss contribution given to M_3^\pm and M_4^\pm by scattered mesons. Let us consider a meson beam crossing two counters A and B assuming that displacement of scattered mesons in C tray of counters can be represented by a Gauss' distribution, whose spread σ has been calculated from counting rates M_3^0 . But, as σ varies roughly as $1/E$ where E is the energy (relativistic) the scattered mesons which contribute to M_3^0 belong for a great extent to $0.5 \div 2.0$ GeV range. Magnetic field separates positive and negative meson trajectories, and calculated probability of counting a negative meson for positive and vice-versa was found to be less than 1%; the scattering of high energy mesons ($E \geq 1.9$ GeV) was found to be of the same order. We must observe that scattering at great angles should follow a $1/\theta^3$ law instead of a Gaussian law, but we think no appreciable difference in order of magnitude of the effect would derive.

In conclusion we are allowed neglecting multiple scattering of mesons in iron.

We will discuss now briefly calculation of energy range of mesons responsible for M_3^\pm and M_4^\pm . Assuming all meson trajectories being in the plane perpendicular to counter's axis, by integrating graphically Bethe-Bloch's formula for ionization losses, we have drawn meson trajectory in a continuous magnetized medium ($B = 15\,000$ Gauss). A plexiglass model for counter's disposition permitted us to evaluate graphically as function of initial energy E of mesons the angle $\xi(E)$ of accepted trajectories: $\xi(E)$ is plotted in fig. 8, where ξ is given in degrees and E in GeV. As shown in fig. 8 acceptance angle ξ is about 1/10 of its maximum value for $E = 1.9$ GeV and therefore we will consider afterwards 1.9 GeV the upper limit of energy of recorded meson as M_3 or M_4 . Mean value of energy of these recorded mesons is given by:

$$\bar{E} = \frac{\int_{E_{\min}}^{\infty} E n(E) \xi(E) dE}{\int_{E_{\min}}^{\infty} n(E) \xi(E) dE},$$

where $n(E)$ is differential spectrum of mesons


 Fig. 8. — Acceptance angle $\xi(E)$ for M -telescopes.

crossing the apparatus. Unfortunately spectra in inclined directions are not known, but in energy range where $\xi(E) \neq 0$, $n(E)$ varies slowly with energy so that we can consider that mean energy is almost constant in all situations and equal to 0.9 GeV as calculated in vertical direction.

5. - Discussion of the results.

1) *Zenithal distribution.* - We will here consider zenithal distributions obtained in Rome in East-West plane for « central coincidences » and *M*-coincidences (Table VIII).

Differential meson spectra in inclined directions have been calculated in a previous note ⁽²⁾ to which we shall refer; the result of these calculations in North-South plane and in vertical direction is a spectrum given by:

$$(1) \quad n^{\pm}(E, \theta, z) = \varphi_{\alpha}(E, \theta, z) \pm \frac{\nu}{2} \varphi_{\beta}(E, \theta, z),$$

where

$$\varphi_{\varrho} = \frac{1}{\varrho} \left[\left(\frac{E}{\varrho x_0 W} \right)^{b/W} \cdot W^{-\gamma} \cdot \Gamma(1 + b/W) \right]. \quad \varrho = \alpha, \beta$$

The meaning of symbols is the following:

- E = the energy of mesons crossing apparatus,
- W = the energy which would have a meson which is crossing the apparatus with energy E , at the top of atmosphere,
- $1/\alpha$ = absorption path of nucleonic component in the atmosphere,
- $1/\beta$ = collision path of nucleonic component in the atmosphere,
- x_0 = thickness in g/cm² travelled by a particle from the top of the atmosphere to the apparatus,
- $b = \frac{\mu c^2 h}{\tau_0 \cos \theta}$ where μ is the rest mass of μ -meson, τ_0 its life time, h the height of homogeneous atmosphere, θ zenithal angle of observation,
- r = a function of the probabilities of processes in which single meson is created. Assuming equal probabilities for all processes we find $r = 0.87$,
- γ = the exponent of power spectrum of primary component in interval of energy which interests.

The meaning of the various factors of function φ is: 1) the first factor derives from μ -mesons decay; 2) the second, from the primary component spectrum; 3) the third represents generation of mesons in nucleonic cascade through the atmosphere.

In East-West plane at a given latitude λ zenithal angle θ , altitude z of

observation the following functions are defined:

$$(2) \quad \begin{cases} e^+(E, \lambda, z, \theta) \\ w^-(E, \lambda, z, \theta) \end{cases} = \varphi_{\alpha>}(E, \theta, z, \lambda) \pm \frac{\nu}{2} \varphi_{\beta>}(E, \theta, z, \lambda)$$

$$\begin{cases} e^-(E, \lambda, z, \theta) \\ w^+(E, \lambda, z, \theta) \end{cases} = \varphi_{\alpha<}(E, \theta, z, \lambda) \mp \frac{\nu}{2} \varphi_{\beta<}(E, \theta, z, \lambda)$$

where

$$\varphi_{e_{\geq}} = \frac{1}{\varrho} \left[\left(\frac{E}{\varrho x_0 W_{\geq}} \right)^{b_{\geq}/W_{\geq}} \cdot W_{\geq}^{-\nu} \cdot \Gamma \left(1 + \frac{b_{\geq}}{W_{\geq}} \right) \right],$$

with $\varrho = \alpha, \beta$, and

$$W_{>} = E + jX \cdot \sec \theta_{>} \cdot \exp[-z/h]$$

$$W_{<} = E + jX \cdot \sec \theta_{<} \cdot \exp[-z/h]$$

$$\theta_{>} = \theta + \Delta, \quad \theta_{<} = \theta - \Delta,$$

$$\Delta(E, \theta, z, \lambda) = \frac{\Lambda(\lambda)}{W \cos \theta} \ln \left(\frac{x_0 \cos \theta}{100} \frac{W}{E} \right);$$

where

$$W = E + jX \cdot \sec \theta \cdot \exp[-z/h]$$

$$b_{\geq} = 1.24 \sec \theta_{\geq}.$$

Angle Δ represents the effect of curvature of meson trajectories due to earth's magnetic field, and j the ionization energy loss per g/cm² and $x = 1.033$ g/cm². The function $\Delta(E, \theta)$ at latitude $\lambda = 45^\circ$ and $Z = 0^\circ$ is plotted in fig. 9.

Numerical values used for calculations ⁽⁹⁾ are the following:

$$j = 1.8 \cdot 10^{-3} \text{ GeV/gcm}^{-2}$$

$$h = 8 \cdot 10^5 \text{ cm}$$

$$1/\alpha = 125 \text{ g/cm}^2$$

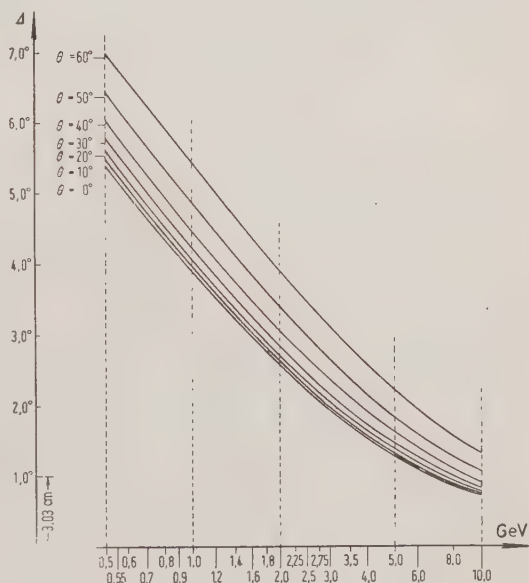


Fig. 9. — Angle $\Delta(E, \theta)$ of deviation of meson trajectories at sea level and latitude $\lambda = 45^\circ$.

⁽⁹⁾ Numerical calculations have been performed by « Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo », using I.B.M. machines.

$$1/\beta = 60 \text{ g/cm}^2$$

$$\frac{\mu c^2 \hbar}{\tau_0 e} = 1,24,$$

$A(\lambda) = 0.0575$ at Rome latitude ($\lambda = 42^\circ$ N) assuming the value 0.24 Oersted for horizontal component of earth's magnetic field,

$$\gamma = 2.2.$$

Differential spectrum for total meson component (positive + negative) is given in vertical direction at sea level by:

$$n(E) = 2\varphi_\alpha(E);$$

it is plotted in fig. 10 together with experimental spectrum.

The agreement is fairly good, except for energies above ~ 3 GeV where the calculated spectrum falls more rapidly than the experimental one. In

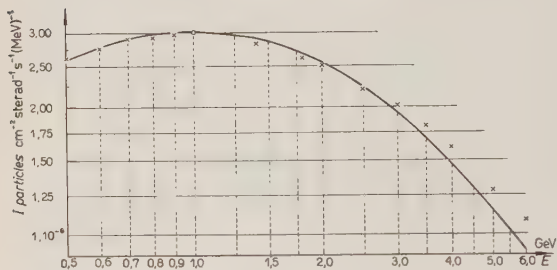


Fig. 10. — Calculated and experimental Rossi's spectrum at sea level.

fig. 11 are plotted integral spectra for various zenithal angles, averaged in eastern and western directions.

Integral zenithal distributions averaged in eastern and western directions for mesons whose energy is greater than 530 and 750 MeV have been calculated and reported in fig. 12 and 13, together with our experimental results. Experimental and calculated distributions are normalized at 60° . It seems that calculated zenithal distributions fall more slowly than the observed ones by increasing zenithal angles. This is just the contrary we could expect from our theoretical differential spectrum which, as we pointed out above, is softer than the experimental one. Differences between observed and calculated values are also plotted in fig. 12 and 13. By this comparison it can be shown that the hypothesis of the presence

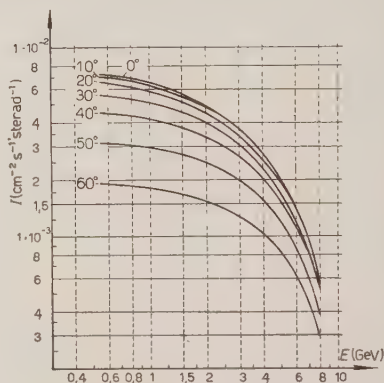


Fig. 11. — Calculated integral spectra at sea level and at various zenithal angles.

of particles other than μ -mesons in penetrating component at sea level cannot be rejected.

In fig. 14 are plotted zenithal distributions calculated for μ -mesons of energy between 530 and 750 MeV together with experimental values of $N_3 - N_4$ coincidences. Intensities are normalized at 60° . In fig. 15 are plotted zenithal distributions calculated for μ -mesons of energy 0.9 GeV together with experimental values of M_3 and M_4 coincidences. Both intensities are normalized in vertical direction. From these figures it seems that in the range of energies involved the agreement between experimental and calculated values is fairly satisfactory. However, it should be noted that the experimental distribution of values M_3 and M_4 at low zenithal angles is quite different from the distribution of $N_3 - N_4$ coincidences. This fact might be interpreted as an indication of the presence of other particles than μ -mesons in the penetrating component at sea level.

The experimental results both for N and M coincidences indicate that zenithal distribution does not follow the law

$$N(\theta) = N_0 \cos^n \theta,$$

with n constant. Assuming this law indeed, the exponent n

should be function of zenithal angle and of energy of mesons. This result is in agreement with Voisin's⁽¹⁰⁾ experiment. In Table XI are reported together with our results obtained from M_3 , Voisin's results. All data reported in Table XI refer to western direction.

The M_3 , M_4 coincidences as well as Voisin's data show that meson component decreases very rapidly with zenithal angle near to the vertical and

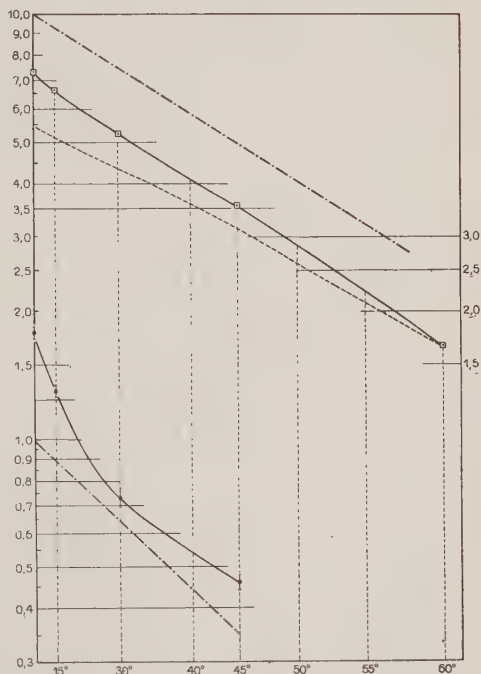
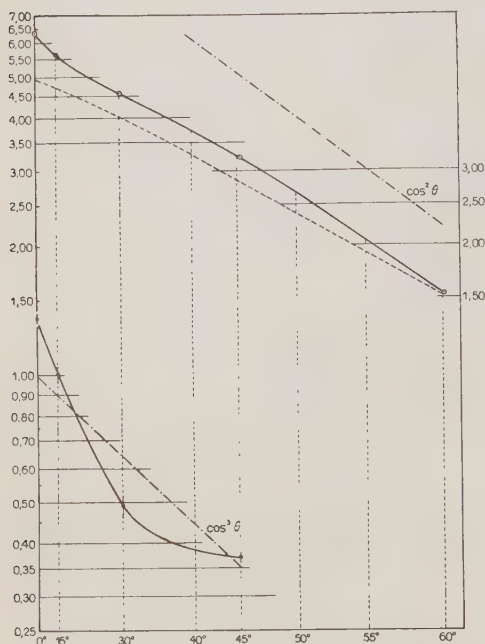


Fig. 12. — Experimental and calculated integral zenithal distributions ($E \geq 0.53$ GeV for mesons) at sea level in East-West plane.

(10) A. G. VOISIN: *Can. Journ. Phys.*, **29**, 505 (1951).

TABLE XI. - Value of exponent $n = \frac{\log (N/N_0)}{\log \cos \theta}$.

Energy Range GeV	15°	30°	45°	50°	75°	80°
0.31 ÷ 0.41 (VOISIN)	—	3.00 ± 0.53	—	2.26 ± 0.07	2.17 ± 0.08	1.71 ± 0.06
0.42 ÷ 0.52 (VOISIN)	—	2.97 ± 0.34	—	2.59 ± 0.08	2.46 ± 0.06	2.11 ± 0.06
0.53 ÷ 1.90 (Present work)	6.7 ± 1.0	4.25 ± 0.31	2.96 ± 0.28	2.74 ± 0.06	—	—

Fig. 13. - Experimental and calculated integral zenithal distributions ($E \geq 0.75$ GeV for mesons) at sea level in East-West plane.

becomes more isotropic increasing zenithal angle. According to Voisin this effect can be explained taking into account the scattering of mesons through the atmosphere, the decay of heavy mesons and nuclear explosions in which mesons are created.

II) Azimuthal distributions. -

As well known, the theory of the effect of the earth's magnetic field on the motion of charged particles has been extensively developed by STÖRMER, VALLARTA, LEMAÎTRE ⁽¹¹⁾. The effects of the earth's field are:

1) to section and restrict the regions of the sky from which charged primary particles may reach the top of the atmosphere;

⁽¹¹⁾ M. S. VALLARTA: *An outline of the theory of the allowed cone of cosmic radiation* (Toronto, 1938); *Journ. Frank. Inst.*, **227**, 1 (1939); *Phys. Rev.*, **74**, 1837 (1938); G. LEMAÎTRE and M. S. VALLARTA: *Phys. Rev.*, **43**, 87 (1933); **49**, 719 (1936); **50**, 493 (1936).

2) to deflect through the atmosphere charged mesons created by primary particles.

Both 1) and 2) determinate a complicate structure of the intensity of meson component in a given zenithal direction, latitude and altitude as function of azimuthal angle (fig. 2 and 6).

The results of integrating the equations of motion to determine allowed and forbidden directions of approach of primaries are rather complicated and recently they were summarized by ALPHER ⁽¹²⁾. The minimum energy of arrival for protons as a function of zenithal angle at geomagnetic latitude $\lambda = 40^\circ$ is plotted in fig. 16. These data refer to the cut-off of the Störmer plus earth's shadow cone ⁽¹³⁾. As shown by fig. 16 a North-South asymmetry is expected at angles greater than 45° . This asymmetry is due to earth's shadow.

a) NS asymmetry. — The calculation of meson trajectories through the atmosphere shows that the effect of magnetic earth's field is negligible for mesons coming from North and South; therefore we should not find any difference in meson differential spectra $n^\pm(E, z, \theta)$ in Northern and Southern direction if no difference there was at creation level. From table II and fig. 2 we can see instead that at 3500 m above sea level, $45^\circ 50'$ North geographical latitude the ratios $\sigma^\pm = N_S^\pm / N_N^\pm$ are the following:

$$\sigma^+ = 0.95 \pm 0.013, \quad \sigma^- = 0.95 \pm 0.011 \quad \text{at } 45^\circ,$$

and

$$\sigma^+ = 1.14 \pm 0.015, \quad \sigma^- = 1.11 \pm 0.012 \quad \text{at } 60^\circ.$$

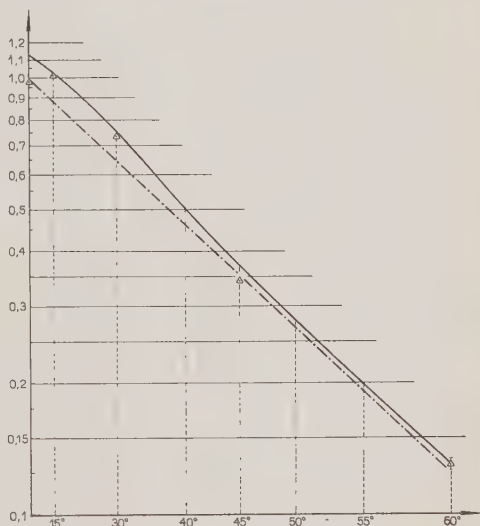


Fig. 14. — Experimental and calculated differential zenithal distributions for mesons whose energy is between 0.53 and 0.75 GeV at sea level.

⁽¹²⁾ R. A. ALPHER: *Journ. Geophys. Res.*, **55**, 437 (1950).

⁽¹³⁾ At latitude $\lambda = 40^\circ$ penumbra between Störmer and main cone is very clear, so that we can assume cut-off energy being due to the Störmer cone.

These data show that no NS-asymmetry manifests at 45° but at 60° there is an asymmetry A_{NS} given by:

$$A_{NS} = 2 \frac{N_s - N_N}{N_s + N_N} = \frac{2(\sigma - 1)}{(\sigma + 1)} = 12 \pm 2 \%,$$

where

$$\sigma = N_s/N_N, \quad N_s = \frac{1}{2}(N_s^+ + N_s^-), \quad N_N = \frac{1}{2}(N_N^+ + N_N^-).$$

The energy cut-off for primary protons at this latitude is a little less than data shown by fig. 16; at 60° zenithal inclination the energies cut-off were

found to be $\epsilon_N = 7.5$ GeV at North, and $\epsilon_s = 2.5$ GeV at South. These data and experimental value of σ can be used in order to calculate the mean ratio k between the energy of primary protons and energy of created mesons.

Supposing the integral spectrum of incident protons being of the form $\epsilon^{-(\gamma+1)}$ with $\gamma = 2.2$ the observed asymmetry σ is given by:

$$\sigma = \left(\frac{\epsilon^*}{\epsilon_N} \right)^{-(\gamma+1)},$$

where $\epsilon_N = 7.5$ and $7.5 > \epsilon^* > 2.5$. ϵ^* represents the minimum proton energy for creating a meson which can reach the observation level

Fig. 15. - Experimental M coincidences zenithal distribution and calculated distribution for $E = 0.9$ GeV at sea level.

with a zenithal angle of 60° and with an energy at least equal to 0.5 GeV. From experimental value of σ it follows:

$$\epsilon^* = 6.8 \pm 0.1 \text{ GeV}.$$

Supposing all mesons created 100 g/cm² under top of the atmosphere, the minimum energy required for a meson in order to reach the observation level (3500 m) with an energy greater than 0.5 GeV and coming from an inclined direction of 60° to the vertical, is 2.7 GeV. Therefore the ratio k between

the energy \mathcal{E} of proton and the energy W of meson would be:

$$k_{3500}(60^\circ) = 2.53 \pm 0.05.$$

It should be noted that the ratio

$$\frac{1}{k} = 39,7 \pm 0,9 \%,$$

cannot be considered the mean fraction of energy given by protons to mesons because the experimental situation selects events of high energy, so that this value can be regarded not in disagreement with theoretical mean value 20%⁽¹⁴⁾ but it indicates the possibility of processes in which about 40% of energy is given to a single meson in the range of energy of few GeV. In our previous work⁽²⁾ we have found $k = 5.1 \pm 0.2$, but this value was obtained in a different way from data collected in vertical direction at 3500, 5100, 7300 m and in inclined directions at 3500 m in EW-plane, and by comparing absolute intensities in different situations with absolute intensity of primary protons.

As we have already observed no contradiction can be found between the actual value and the previous one, because in vertical direction and at higher altitudes the mean energy of mesons is lower. However, as we shall say in the following, data collected at sea level seems to indicate that the ratio $1/k_0(60^\circ)$ does not exceed the value 22% notwithstanding the high value of minimum energy of mesons; an explanation of this can be found if one considers the possibility of processes in which more than one meson is created.

At sea level at 30° and 45° we did not observe any NS-asymmetry as expected.

b) EW-asymmetry. — These asymmetries cannot be simply explained as due to the energy cut-off of the primary radiation, because of the curvature of positive and negative mesons through the atmosphere. From eq. (2) indeed

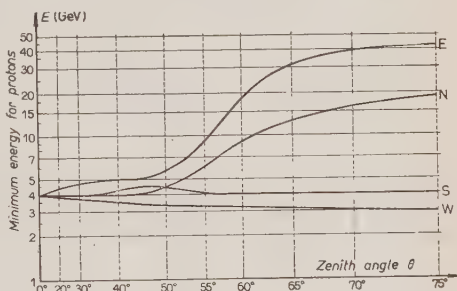


Fig. 16. — Energy cut-off of primary protons at the top of atmosphere as function of zenithal and azimuthal angles.

⁽¹⁴⁾ P. CALDIROLA: *Nuovo Cimento*, **6**, 565 (1949); P. CALDIROLA and A. LOINGER: *Nuovo Cimento*, **7**, 161 (1950); M. CINI and G. WATAGHIN: *Nuovo Cimento*, **7**, 135 (1949).

we can see that the total intensity in western direction $w = w^+ + w^-$ is different from the total intensity $e = e^+ + e^-$ in eastern direction; therefore, also if we do not take into account the asymmetry due to different energy cut-off for primaries coming from East and West, we should measure at a given altitude and latitude λ , zenithal angle θ and energy E of mesons, an asymmetry:

$$(4) \quad A_{EW}(E, \theta, z, \lambda) = 2 \frac{w - e}{w + e} = \nu \frac{\Psi_\beta(E, \theta, z, \lambda)}{\Phi_\alpha(E, \theta, z, \lambda)},$$

where we have put:

$$(5) \quad \Psi_e = \varphi_{e<} - \varphi_{e>}, \quad \Phi_e = \varphi_{e<} + \varphi_{e>} \quad [e = \alpha, \beta].$$

$\varphi_{e\geq}$ having been defined by (3) and $\nu = 0.87$. The function $A(E, \theta)$ has been calculated for $z = 0$ and $\lambda = 40^\circ$ and plotted in fig. 17.

In the table XII we have reported the experimental values of A at sea level and the calculated values for the integral channels N_3 and N_4 .

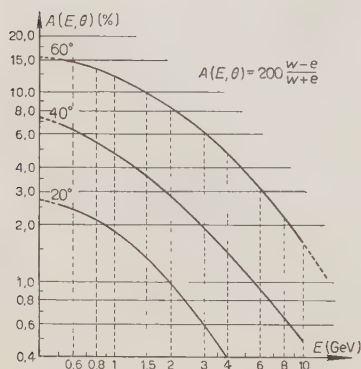


Fig. 17. — East-West calculated asymmetry at sea level and $\lambda = 45^\circ$ due to mesons deflection through the atmosphere.

As shown by the table experimental values are not in agreement with the theory: at high zenithal angles the experimental values are too low and at 30° it seems that experimental values are higher than calculated ones, but as the statistical errors are too large we do not believe that data at 30° can be used for any discussion. From these data it seems reasonable to conclude that a very small symmetry, if any, has been found. That means: a) in our calculation we have overestimated the effect of deflection of

TABLE XII. — EW asymmetries at sea level (%).

Energy (GeV)		15°	30°	45°	60°
≥ 0.53	obs.	0.5 ± 1.0	5.4 ± 1.2	-1.3 ± 0.9	0.7 ± 1.0
	calc.	0.7	1.5	2.0	4.1
≥ 0.75	obs.	1.9 ± 1.2	5.7 ± 1.5	-2.2 ± 1.0	0.0 ± 1.1
	calc.	0.7	1.4	1.8	4.0

mesons through the atmosphere, b) no asymmetry is due to the primaries.

Consequently we should conclude that a very small fraction of mesons observed at sea level at 60° can be created by protons whose energy is lower than cut-off energy i.e. 18 GeV. Therefore, as minimum energy of observed mesons must be at creation level at least 4 GeV, the energy fraction transferred by protons to mesons comes to be about 22%. This result can be considered quite reasonable, but if we compare it with the results obtained at 60° at 3500 m (about 40%) we should conclude that the energy fraction $1/k = W/\mathcal{E}$ increases by increasing energy up to 7 GeV but for higher energies the number of mesons created increases and consequently $1/k$ decreases.

Let us consider now the values of asymmetries $a^\pm = N_W^\pm/N_E^\pm$ and A_{EW} obtained at 45° and 60° at 3500 m:

$$\left. \begin{array}{l} a^+ = 1,06 \pm 0,01 \quad a^- = 0,95 \pm 0,01 \\ A_{EW} = 11,5 \pm 0,7 \end{array} \right\} \text{ at } 45^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} a^+ = 1,31 \pm 0,02 \quad a^- = 0,97 \pm 0,01 \\ A_{EW} = 12 \pm 2\% \end{array} \right\} \text{ at } 60^\circ \text{ zenithal} \\ \text{inclination.}$$

Data at 60° have been already discussed in ⁽²⁾. The calculated values were: $w^+ = 1.31$ in a very close agreement with experimental value; and $a^- = 0.77$.

At 45° the energy cut-off for protons is more or less the same in all directions and quite small (~ 3 GeV) and we cannot expect any asymmetry due to primaries; consequently the observed effect should be due to meson's deflection through the atmosphere. On the contrary at 60° the energy cut-off for protons is 3.8 GeV in Western direction and 17 GeV in Eastern direction. The observed asymmetry at 60° is expected to be larger than asymmetry observed at 45° EW and larger than asymmetry observed at 60° NS, in disagreement with our experimental results. Furthermore a very small EW-asymmetry ($3 \pm 5\%$) has been measured by GROETZINGER and McCURE ⁽¹⁵⁾ at 58° zenithal inclination, latitude 49° , altitude 4300 m, for mesons of energy $E = 0.8$ GeV.

III) *Charge excess.* — As well known, the meson component of cosmic radiation manifests an excess of positive mesons with respect to negative. However, because in certain conditions, a negative excess is measurable, we will call this excess «charge excess».

⁽¹⁵⁾ G. GROETZINGER and G. W. McCURE: *Phys. Rev.*, **77**, 777 (1950).

The positive excess was considered up to now as a direct consequence of the principle of charge conservation and of the fact that primary radiation is composed of positive particles only (protons and heavy nuclei). But, as shown by fig. 4 and 7, the charge effect is always positive in northern, southern, western directions, but becomes negative in eastern direction for $\theta > 45^\circ$. Therefore an important question arises: *a*) either the primary radiation would be composed by positive and negative particles in different percentage at various azimuth and zenith angles because of the earth's and perhaps sun's field, *b*) or the curvature of meson's trajectories through the atmosphere makes us able to explain completely the observed negative effect.

The question is of the greatest importance. In our previous paper ⁽²⁾ we concluded in favour of the hypothesis *b*), but as some doubts remained on this question we estimated interesting to perform some more experiments in different conditions. For this reasons we had improved the technique and performed the «2nd experiment» firstly in Rome and secondly in Bombay (9° geomagnetic latitude) ⁽¹⁶⁾.

From equations (1) ⁽³⁾ we can easily calculate the «differential charge excess» defined by:

$$\delta(E, \theta, z) = 2 \frac{n^+(E, \theta, z) - n^-(E, \theta, z)}{n^+(E, \theta, z) + n^-(E, \theta, z)},$$

which is found to be, in vertical and NS directions:

$$(6) \quad \delta(E, \theta, z) = \nu \frac{\varphi_\beta(E, \theta, z)}{\varphi_\alpha(E, \theta, z)} = \delta_\infty \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\nu/\omega},$$

where

$$(7) \quad \delta_\infty = \lim_{E \rightarrow \infty} \delta(E, \theta) = \nu \frac{\alpha}{\beta}.$$

For EW directions instead equation (2) gives:

$$(8) \quad \delta_w(E, \theta, \lambda, z) = 2 \frac{\Psi_\alpha + (\nu/2) \Phi_\beta}{w(E, \theta)}; \quad \delta_E(E, \theta, \lambda, z) = 2 \frac{-\Psi_\alpha + (\nu/2) \Phi_\beta}{e(E, \theta, \lambda, z)}$$

where Ψ_θ , Φ_θ have been defined by (5) and $w(E, \theta, \lambda, z)$, $e(E, \theta, \lambda, z)$ are the differential spectra for total meson component coming from a zenithal di-

⁽¹⁶⁾ The results obtained in Bombay will be published as soon as possible.

rection defined by θ , from West and East. Introducing the asymmetry $A(E, \theta, z, \lambda)$ defined by (4) they can be written as follows:

$$(9) \quad \begin{cases} w(E, \theta, z, \lambda) = \Phi_{\alpha}(E, \theta, \lambda, z) \left[1 + \frac{1}{2} A(E, \theta, \lambda, z) \right]; \\ e(E, \theta, z, \lambda) = \Phi_{\alpha}(E, \theta, \lambda, z) \left[1 - \frac{1}{2} A(E, \theta, \lambda, z) \right]. \end{cases}$$

From equations (7), (8), (9) by putting

$$v \frac{\Phi_{\beta}}{\Phi_{\alpha}} \approx v \frac{\varphi_{\beta}}{\varphi_{\alpha}} = \delta(E, \theta)$$

and neglecting A^2 with respect to unity, we find:

$$(10) \quad \delta_{\text{EW}}(z, E, \theta, \lambda) = \frac{1}{2} (\delta_{\text{E}} + \delta_{\text{W}}) \cong \delta(E, \theta, z) - A(E, z, \theta, \lambda) \frac{\Psi_{\alpha}(E, \theta, \lambda, z)}{\Phi_{\alpha}(E, \theta, \lambda, z)}.$$

It is worth while observing here that if trajectories of mesons are symmetrical (vertical, north, south) $\Psi_{\alpha} = \Psi_{\beta} = A = 0$, and that A is proportional to γ , like the positive excess δ . The expression

$$A \frac{\Psi_{\alpha}}{\Phi_{\alpha}} = f(E, \theta),$$

is negligible with respect to δ for small zenithal angles and increases by increasing zenithal angle, and decreases by increasing energy. For comparison with experimental results we have calculated the positive to negative ratios

$$\frac{n^+}{n^-} = \frac{2 + \delta}{2 - \delta},$$

deduced from $\delta(E, \theta)$ given by (6) and $\delta_{\text{EW}}(E, \theta)$ (10) for $z = 0$ and $\lambda = 42^\circ$. These ratios have been reported in table XIII.

The experimental values of positive to negative ratios ε obtained in the differential channels $N_3 - N_4$, M_3 , M_4 have been reported in table XIV. The values of ε obtained from M -coincidences and reported in the forth and fifth columns have been corrected for the calculated contribution of knock-on's reported in table X. The statistical errors of M_3 and M_4 coincidences (4th and

TABLE XIII. — *Theoretical values of positive to negative ratio.*

Zenithal angle	0.5 GeV		0.75 GeV		0.9 GeV		1.9 GeV	
	NS	EW	NS	EW	NS	EW	NS	EW
0°		1.34		1.35		1.36		1.40
20°		1.34		1.34		1.35		1.39
40°	1.32	1.30	1.34	1.33	1.34	1.33		1.38
60°	1.32	1.21	1.33	1.25	1.34	1.27	1.36	1.33

TABLE XIV. — *Experimental averaged values of positive to negative ratio ε .*

Zenith angle	Azimuth	Energy Range (GeV)		
		0.53 ÷ 0.75	0.53 ÷ 1.90 ($\bar{E} = 0.9$)	0.75 ÷ 1.90
0°	—	1.22 ± 0.05	1.33	1.19
15°	EW	1.07 ± 0.02	1.21	1.08
30°	EW	1.20 ± 0.02	1.37	1.50
	NS	1.20 ± 0.03	1.26	1.25
45°	EW	1.36 ± 0.05	1.25	1.58
	NS	—	1.39	1.78
60°	EW	1.28 ± 0.06	1.26	1.20

5th columns) are approximately of 5% and 10% respectively. The values ε_{EW} have been averaged over the azimuthal direction (East and West) is such a way that

$$2 \frac{\varepsilon_{EW} - 1}{\varepsilon_{EW} + 1} = \frac{1}{2} (\delta_E^{\text{exp}} + \delta_W^{\text{exp}}),$$

where δ_E^{exp} δ_W^{exp} are the measured effects, and the same for ε_{NS} .

Unfortunately no definite conclusion can be obtained from experimental data, but it seems that these are not in disagreement with theoretical values reported in table XIII. An indication of an anomalous decrease of δ at 15° can be found from data collected.

The theory above outlined shows that the positive excess $\delta(E, \theta, z)$ is quite

independent from the exponent γ of the spectrum and depends only from the ratio

$$\frac{b}{W} = \frac{\mu c^2 h \sec \theta}{\tau_0 c (E + jX \sec \theta \cdot \exp[-z/h])} = \frac{\mu c^2 h}{\tau_0 c (E \cos \theta + jX \exp[-z/h])},$$

as it is shown by eq. (6). This result can be used for drawing a graph from which it is possible to derive the value of δ when it is known the ratio b/W which is function of E, θ, z . In fig. 18 is plotted $\log \delta$ against b/W . Scales

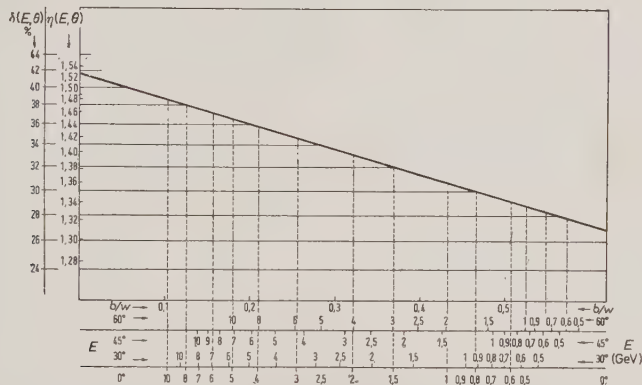


Fig. 18. - Positive excess $\delta = 200(n^+ - n^-)/(n^+ + n^-)$ as function of b/W . In the figure the ratio $\eta = n^+/n^-$ and the energy E for various zenithal angles are indicated.

of E are also indicated for $z = 0$ for different values of θ . Values of positive to negative ratio are also indicated.

Let us consider now the following expressions:

$$\delta_{<} = 2 \frac{w^+ - e^-}{w^+ + e^-}, \quad \delta_{>} = 2 \frac{e^+ - w^-}{e^+ + w^-},$$

which according to (2) and (7) can be rewritten:

$$\delta_{<} = \nu \frac{\varphi_{\beta <}}{\varphi_{\alpha <}} = \delta_{\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{b_{<}/w_{<}}$$

$$\delta_{>} = \nu \frac{\varphi_{\beta >}}{\varphi_{\alpha >}} = \delta_{\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{b_{>}/w_{>}}$$

where the ratios $(b/W)_{\geq}$ are given by:

$$\left(\frac{b}{W}\right)_{\geq} = \frac{\mu c^2 \hbar}{\tau_0 c (E \cos \theta_{\geq} + jX \exp[-z/\hbar])} \approx \frac{b}{W}.$$

These formulas show that δ given by (6) is approximately the averaged value between $\delta_{<}$ and $\delta_{>}$, and $\delta_{<} \sim \delta_{>} \sim \delta$ ⁽¹⁷⁾. From physical point of view this can be easily understood if one considers that w^+ and e^- (e^+ and w^-) refer to symmetrical trajectories, and therefore values of δ 's or the corresponding ratios w^+/e^- (e^+/w^-) are not affected by the bending of meson trajectories. In table XV we have reported the experimental values of these ratios for

TABLE XV. - Experimental and theoretical values of the ratios w^+/e^- and e^+/w^- .

Zenith angle	w^+/e^-				e^+/w^-			
	Experimental Energy range (GeV)			Theor. $E=0.9$	Experimental Energy range (GeV)			Theor. $E=0.9$
	0.53 ÷ 0.75	0.53 ÷ 1.9	0.75 ÷ 1.9		0.53 ÷ 0.75	0.53 ÷ 1.9	0.75 ÷ 1.9	
15°	1.01 ± 0.03	1.25	1.34	1.36	1.14 ± 0.04	1.18	0.90	1.35
30°	1.24 ± 0.05	1.45	1.71	1.35	1.16 ± 0.05	1.29	1.32	1.34
45°	1.42 ± 0.06	1.20	1.48	1.34	1.30 ± 0.06	1.30	1.75	1.34
60°	1.35 ± 0.06	1.03	0.92	1.33	1.24 ± 0.05	1.53	1.63	1.32

$N_3 - N_4$, M_3 , M_4 with calculated values for $E = 0.9$ GeV. As in table XIV, M_3 and M_4 have been corrected for knock-on's contribution and the statistical errors are of the order of 5% and 10% respectively.

The agreement between theoretical and experimental values cannot be regarded as satisfactory.

6. - Conclusions.

From the preceding discussion, the following conclusions would be tentatively derived:

1) At sea level observed zenithal distribution of penetrating particles whose range is greater than 314.4 g/cm² of iron + 4.5 g/cm² of brass, but stopped by 20 cm Pb, agrees fairly well with zenithal distribution calculated for μ -mesons of energy between 0.53 and 0.75 GeV. Also zenithal distributions observed for μ -mesons of mean energy of about 0.9 GeV, are in agreement with calculated ones. However some differences have been observed

(17) This is true if no EW asymmetry is due to primaries.

at small zenithal angles between zenithal distributions of penetrating particles and that of μ -mesons.

Zenithal distributions of penetrating particles of energy greater than 0.53 and 0.75 GeV at sea level show a slope larger than calculated distributions.

Both these facts would give some indication of the presence of a penetrating radiation different from μ -mesons, and with a zenithal distribution close to the vertical.

II) Observed value of NS-asymmetry at 3500 m would indicate that primary protons of energy about 7 GeV, transfer to mesons a large fraction of their energy, up to 40%.

The accuracy of measured EW-asymmetries at sea level does not allow a definite comparison with calculated values, but observed asymmetries at 60° seems to be much lower than expected.

III) The observed charge effect observed at various zenithal and azimuthal angles, agrees fairly well with values calculated by taking into account the bending of positive and negative meson trajectories through the atmosphere.

Some of the observed values for the positive to negative ratio at 15° averaged in EW plane show a large disagreement from average values measured at other zenithal angles.

Ratios between intensities of positive μ -mesons coming from West and negative from East, and similar ratios between positive coming from East and negative coming from West, refer to symmetrical trajectories of mesons deflected by earth's magnetic field through the atmosphere. For this reason we should expect these ratios to be a measurement of the positive excess independent from the effect of earth's magnetic field. However experimental data obtained at large zenithal angles show a disagreement with expected values, and we could not explain it.

RIASSUNTO

Viene descritta una serie di misure sulle particelle penetranti della radiazione cosmica positive e negative a varie altezze e sotto diversi angoli zenitali e azimutali. Scopo dei presenti esperimenti era di ottenere qualche informazione sui processi di produzione dei mesoni da parte dei protoni in alta quota. L'eccesso positivo, l'asimmetria Est-Ovest, l'asimmetria Nord-Sud e la distribuzione zenitale dei mesoni sono stati misurati per diverse energie dei mesoni e a diverse quote. Tutti i dati sperimentali ottenuti sono stati confrontati con i calcoli effettuati sulla base di una generazione plurima di mesoni. Il confronto mostra un buon accordo in certi casi ed in altri meno buono, ma nel complesso i risultati sperimentali non possono essere considerati in disaccordo con la teoria.

Teoria non locale dell'interazione tra particelle di Fermi.

P. BUDINI e C. VILLI

Istituto di Fisica dell'Università - Trieste

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova

(ricevuto il 21 Giugno 1953)

Riassunto. — Si elabora una teoria relativistica non locale dell'interazione diretta tra particelle di Fermi e si danno i due primi elementi della matrice S seguendo il metodo di Yang e Feldman. Sono discussi i risultati della teoria applicata al problema della cattura nucleare del mesone μ^- .

1. — Introduzione.

Una delle maggiori difficoltà incontrate dalla fisica teorica di questi ultimi decenni è costituita dal noto problema delle divergenze nelle teorie dei campi. Il concetto di campo e di interazione non locale è stato introdotto ⁽¹⁾ appunto nel tentativo di superare questa difficoltà e, soprattutto recentemente, ha fornito lo spunto a numerose ricerche ⁽²⁾.

Indipendentemente dallo sviluppo delle teorie non locali, il problema delle divergenze è stato affrontato e praticamente superato o, per lo meno, brillantemente aggirato da TOMONAGA, SCHWINGER, FEYNMAN, DYSON ed altri nel caso delle interazioni elettrodinamiche e parte delle interazioni nucleari con il metodo della rinormalizzazione.

Il successo di queste teorie fa dubitare a molti che la trattazione non locale possa portare ad alcun effettivo progresso delle nostre conoscenze teoriche

⁽¹⁾ G. WATAGHIN: *Zeits. f. Phys.*, **88**, 92 (1934); **92**, 547 (1935); *Nuovo Cimento*, **8**, 592 (1951); **9**, 208 (1952); **10**, 500 (1953); H. YUKAWA: *Phys. Rev.*, **76**, 300, 1731 (1949); **77**, 219 (1950); A. PAIS e G. E. UHLENBECK: *Phys. Rev.*, **79**, 145 (1950).

⁽²⁾ P. KRISTENSEN e C. MÖLLER: *Dat. King. Dans. Vid.*, **27**, n. 7 (1952); C. BLOCH: *Dat. King. Dans. Vid.*, **27**, n. 8 (1952); W. PAULI: *Nuovo Cimento*, **10**, 649 (1953); M. CHRÉTIEN e R. E. PEIERLS: *Nuovo Cimento*, **10**, 668 (1953); R. E. PEIERLS e H. MAC MANUS: *Proc. Roy. Soc. A* **195**, 323 (1948).

sulle interazioni rinormalizzabili. Nonostante che alcune recenti ricerche ⁽³⁾ abbiano dimostrato che la serie di Dyson, pur rinormalizzata, diverge, non si può ancora arguire, infatti, che la trattazione non locale sia la più adatta a superare questa difficoltà, in quanto la divergenza della serie di Dyson può dipendere dal fatto che essa è inadatta alla trattazione degli stati legati.

Il problema delle divergenze rimane invece aperto nel caso delle interazioni non rinormalizzabili ⁽⁴⁾ (ammesso che esse siano veramente tali) e quindi si può sperare che la trattazione non locale di queste divergenze porti a qualche progresso o, quanto meno, a qualche suggerimento sul modo più adatto di trattarle.

Ci proponiamo in questo e in un successivo lavoro di studiare la interazione non locale tra particelle di Fermi. Una simile trattazione è già stata suggerita da W. HEISENBERG ⁽⁵⁾ e da K. WILDERMUTH ⁽⁶⁾ in occasione di alcune ricerche sull'interazione tra campi spinoriali. Ma, mentre quest'ultimo Autore si propone lo studio degli stati legati, noi accenteremo la nostra attenzione sullo studio della matrice S .

Allo scopo di sviluppare una trattazione relativisticamente invariante prenderemo a modello i recenti lavori di P. KRISTENSEN e C. MÖLLER ⁽²⁾ e di C. BLOCH ⁽²⁾ sull'interazione non locale nucleone-mesone.

2. - Formalismo generale.

Si parta dalla densità di lagrangiano:

$$(1) \quad L = L_1 + L_2 + L_3 + L_{\text{int}},$$

dove (posto $\hbar = 1$, $c = 1$):

$$(2) \quad L_i(x) = \frac{1}{2} \left[\psi_i(x)(\not{\nabla} - \mu_i)\bar{\psi}_i(x) - \bar{\psi}_i(x)(\not{\nabla}^\text{T} + \mu_i)\psi_i(x) \right],$$

con

$$\not{\nabla} = \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}; \quad \not{\nabla}^\text{T} = \gamma_\nu^\text{T} \frac{\partial}{\partial x_\nu},$$

⁽³⁾ W. THIRRING: *Helv. Phys. Acta*, **26**, 33 (1953).

⁽⁴⁾ G. LÜNDERS, R. OEHME e W. E. THIRRING: *Zeits. f. Naturforschung*, **7**, 213 (1952).

⁽⁵⁾ W. HEISENBERG: *Zeits. f. Naturforschung*, **8**, 105 (1953).

⁽⁶⁾ K. WILDERMUTH: *Zeits. f. Naturforschung*, **8**, 105 (1953).

rappresentano i lagrangiani dei campi spinoriali liberi di masse μ_i . Per il lagrangiano d'interazione poniamo:

$$(3) \quad L_{\text{int}}(x) = -\mathcal{H}_{\text{int}}(x) = -g \int \bar{\psi}_1(x) \Omega \psi_2(2) \bar{\psi}_3(3) \Omega' \psi_4(4) F(x, 2, 3, 4) d(234) - \\ - g \int \bar{\psi}_4(4) \Omega'^* \psi_3(3) \bar{\psi}_2(2) \Omega^* \psi_1(x) F^*(4, 3, 2, x) d(234),$$

dove 2 sta per $x^{(2)}$, ecc., $d(234)$ per $dx^{(2)} dx^{(3)} dx^{(4)}$ e $dx^{(1)}$ per $dx_1^{(1)} dx_2^{(1)} dx_3^{(1)} dx_0^{(1)}$. Nel seguito supporremo che $\bar{\psi}_1 \psi_2$ e $\bar{\psi}_3 \psi_4$ abbiano la stessa parità e quindi sia $\Omega = \Omega'$. Siccome nella (3) compaiono solo prodotti contenenti due Ω e inoltre, com'è noto, $\Omega^* = \mp \Omega$, porremo $\Omega' = \Omega^* = \Omega$. Si hanno allora per Ω le seguenti possibilità:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Omega = 1 & (\text{scalare}) \\ \Omega = i\gamma_\nu & (\text{vettoriale}) \\ \Omega = i\gamma_\nu \gamma_\mu & (\text{tensoriale}) \\ \Omega = \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_0 & (\text{pseudovettoriale}) \\ \Omega = i\gamma_5 = i\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 & (\text{pseudoscalare}) \end{array} \right.$$

La funzione di forma $F(1234)$ è relativisticamente invariante; la sua trasformata di Fourier può scriversi

$$(5) \quad F(1234) = (2\pi)^{-12} \int G(q_1, q_2, q_3, q_4) \delta(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \cdot \\ \cdot \exp[i(q_1 1 + q_2 2 + q_3 3 + q_4 4)] d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 q_3 d^4 q_4,$$

con G funzione invariante delle q_i . La funzione F inoltre deve essere tale da ridursi al prodotto di tre funzioni δ di Dirac nelle differenze dei punti 1, 2, 3, 4 (ovvero essere $G = 1$) quando in un opportuno sistema di riferimento i campi risultino lentamente variabili (cfr. parte II). Supporremo nel seguito $F(1234) = F^*(4321)$.

Dal lagrangiano (1) si ottengono con il solito metodo le equazioni del moto

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\not{\nabla} - \mu_i) \bar{\psi}_i(x) = \frac{\delta H_{\text{int}}}{\delta \psi_i(x)}, \\ (\not{\nabla} + \mu_i) \psi_i(x) = -\frac{\delta H_{\text{int}}}{\delta \bar{\psi}_i(x)}, \end{array} \right.$$

dove

$$H_{\text{int}} = \int \mathcal{H}_{\text{int}}(x) dx = H + H^*,$$

cosicchè, per esempio:

$$(7) \quad \frac{\delta H_{\text{int}}}{\delta \bar{\psi}_3(x)} = g \int \bar{\psi}(1) \Omega \psi_2(2) \Omega \psi_4(4) F(12, x, 4) d(124).$$

Seguendo il metodo di YANG e FELDMAN ⁽⁷⁾ definiamo i campi in arrivo $\psi_j^{\text{ar}}(x)$ e i campi in partenza $\psi_j^{\text{pa}}(x)$ mediante le

$$(8a) \quad \begin{cases} \psi_j(x) = \psi_j^{\text{ar}}(x) + \int S_j^{\text{rit}}(x-x') \frac{\delta H_{\text{int}}}{\delta \bar{\psi}_j(x')} dx', \\ \bar{\psi}_j(x) = \bar{\psi}_j^{\text{ar}}(x) + \int S_j^{\text{ar}}(x'-x) \frac{\delta H_{\text{int}}}{\delta \psi_j(x')} dx', \end{cases}$$

$$(8b) \quad \begin{cases} \psi_j(x) = \psi_j^{\text{pa}}(x) + \int S_j^{\text{av}}(x-x') \frac{\delta H_{\text{int}}}{\delta \bar{\psi}_j(x')} dx', \\ \bar{\psi}_j(x) = \bar{\psi}_j^{\text{pa}}(x) + \int S_j^{\text{rit}}(x'-x) \frac{\delta H_{\text{int}}}{\delta \psi_j(x')} dx', \end{cases}$$

in cui S^{av} e S^{rit} sono le note funzioni invarianti di Green per l'equazione di Dirac, e vanno inserite nelle H_{int} al posto dal quale sono state tolte le ψ_j . Dalle (8a, b) si ricavano per sottrazione le

$$(9) \quad \begin{cases} \psi_j^{\text{pa}}(x) = \psi_j^{\text{ar}}(x) - \int S_j(x-x') \frac{\delta H_{\text{int}}}{\delta \bar{\psi}_j(x')} dx', \\ \bar{\psi}_j^{\text{pa}}(x) = \bar{\psi}_j^{\text{ar}}(x) - \int S_j(x-x') \frac{\delta H_{\text{int}}}{\delta \psi_j(x')} dx'. \end{cases}$$

Pensando ora le $\psi_j(x)$ come operatori nella rappresentazione di Heisenberg, le ψ_j^{ar} e le ψ_j^{pa} obbediscono alle relazioni di permutazione dei campi liberi:

$$(10) \quad \begin{cases} \{\bar{\psi}_j^{\text{ar}}(x), \bar{\psi}_l^{\text{ar}}(x')\} = 0; \quad \{\psi_j^{\text{ar}}(x), \psi_l^{\text{ar}}(x')\} = 0, \\ \{\psi_j^{\text{pa}}(x), \bar{\psi}_l^{\text{ar}}(x')\} = -i\delta_{jl} S_j(x-x'), \end{cases}$$

in cui è necessario tener presente che j ed l non sono indici di spin, ma caratterizzano la massa propria degli spinori.

Esiste allora una trasformazione unitaria S che trasforma le $\psi_j^{\text{ar}}(x)$ in $\psi_j^{\text{pa}}(x)$:

$$(11) \quad \psi_j^{\text{pa}} = S^{-1} \psi_j^{\text{ar}} S,$$

e questa è, per definizione, la matrice S .

(7) C. N. YANG e D. FELDMAN: *Phys. Rev.*, **76**, 972 (1950).

3. - Gli elementi della matrice S .

Pensiamo la matrice S sviluppata in serie di potenze di g

$$(12) \quad S = 1 + S_{(1)} + S_{(2)} + \dots + S_{(N)} + \dots$$

Analogamente dalla (9), introducendo nella H_{int} le ψ_j date dalle (8), possiamo sviluppare una qualsiasi ψ^{pa} in una serie di potenze di g tale che in ogni termine della serie compaiano solamente i campi in arrivo ψ^{ar} :

$$(13) \quad \psi^{pa} = \psi_{(0)}^{pa} + \psi_{(1)}^{pa} + \psi_{(2)}^{pa} + \dots$$

Allora, dalla condizione di unitarietà della S , sostituendo le serie (12) e (13) nella (11) e identificando i coefficienti delle stesse potenze di g , si ottiene

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{(0)}^{pa} = \psi^{\text{ar}} \\ \psi_{(1)}^{pa} = [\psi^{\text{ar}}, S_{(1)}] \\ \psi_{(2)}^{pa} = [\psi^{\text{ar}}, S_{(2)}] - S_{(1)}\psi_{(1)}^{pa} \\ \psi_{(3)}^{pa} = [\psi^{\text{ar}}, S_{(3)}] - S_{(1)}\psi_{(2)}^{pa} - S_{(2)}\psi_{(1)}^{pa} \\ \psi_{(4)}^{pa} = [\psi^{\text{ar}}, S_{(4)}] - S_{(1)}\psi_{(3)}^{pa} - S_{(2)}\psi_{(2)}^{pa} - S_{(3)}\psi_{(1)}^{pa} \\ \dots \end{array} \right.$$

Nel nostro caso si trova allora (vedi Appendice):

$$(15) \quad S_{(1)} = -iH_{\text{int}} = -ig \int [\bar{\psi}_1(1)\Omega\psi_2(2)\bar{\psi}_3(3)\Omega\psi_4(4) + \\ + \bar{\psi}_4(4)\Omega\psi_3(3)\bar{\psi}_2(2)\Omega\psi_1(1)] F(1234) d(1234),$$

$$(16) \quad S_{(2)} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

dove:

$$(16a) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 = -g^2 \int \psi_4^{\text{ar}}(8)\Omega\psi_3^{\text{ar}}(7)\bar{\psi}_2^{\text{ar}}(6)\Omega S_1(5-1)\Omega\psi_2^{\text{ar}}(2)\bar{\psi}_3^{\text{ar}}(3)\Omega\psi_4^{\text{ar}}(4) \cdot \\ \cdot F(1234)F(5678) d(12345678), \\ T_2 = -g^2 \int \bar{\psi}_1^{\text{ar}}(1)\psi_4^{\text{ar}}(8)\Omega\psi_3^{\text{ar}}(7)\Omega\bar{S}_2(2-6)\Omega\psi_1^{\text{ar}}(5)\bar{\psi}_3^{\text{ar}}(3)\Omega\psi_4^{\text{ar}}(4) \cdot \\ \cdot F(1234)F(5678) d(12345678), \\ T_3 = -g^2 \int \bar{\psi}_1^{\text{ar}}(1)\Omega\psi_2^{\text{ar}}(2)\bar{\psi}_4^{\text{ar}}(8)\Omega\bar{S}_3(7-3)\bar{\psi}_2^{\text{ar}}(6)\Omega\psi_1^{\text{ar}}(5)\Omega\psi_4^{\text{ar}}(4) \cdot \\ \cdot F(1234)F(5678) d(12345678), \\ T_4 = -g^2 \int \bar{\psi}_1^{\text{ar}}(1)\Omega\psi_2^{\text{ar}}(2)\bar{\psi}_3^{\text{ar}}(3)\Omega S_4(4-8)\Omega\psi_3^{\text{ar}}(7)\bar{\psi}_2^{\text{ar}}(6)\Omega\psi_1^{\text{ar}}(5) \cdot \\ \cdot F(1234)F(5678) d(12345678). \end{array} \right.$$

A rigore ad $S_{(2)}$, dovrebbe ancora essere aggiunto un termine rappresentante una reiterazione di $S_{(1)}$. Questo termine nel seguito verrà trascurato poichè, descrivendo due indipendenti processi del primo ordine, non dà alcun contributo ai processi del secondo ordine che prenderemo in considerazione (in parte II) nè può presentare problemi di divergenza.

I processi fisici reali saranno descritti, in prima e in seconda approssimazione, dagli elementi di matrice, tra i dati stati iniziali e finali, degli operatori $S_{(1)}$ e $S_{(2)}$, rispettivamente.

Esaminiamo ora un caso particolare che permetterà, fra l'altro, di chiarire qualche possibile significato fisico del fattore di forma.

4. - Cattura K del mesone μ^- .

Il noto processo di cattura (*)

$$(17) \quad \mu^- + P \rightarrow N + \nu,$$

è descritto dal primo termine della (15) qualora si ponga:

$$\psi_1 = \psi_N; \psi_2 = \psi_P; \psi_3 = \psi_\nu; \psi_4 = \psi_\mu$$

L'elemento di matrice corrispondente si ottiene immediatamente:

$$(18) \quad M_{\text{catt}} = g \int \bar{\psi}_N(1) \Omega \psi_P(2) \bar{\psi}_\nu(3) \Omega \psi_\mu(4) F(1234) d(1234),$$

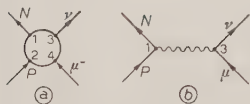


Fig. 1.

in cui, naturalmente, le ψ non sono più operatori ma le funzioni d'onda delle particelle interagenti.

In questo particolare processo si può non tener conto della eventuale non localizzabilità tra i punti 1 e 2 e i punti 3 e 4, in quanto è da presumere che essa non possa dare effetti rivelabili. Porremo pertanto:

$$(19) \quad \begin{aligned} F(1234) &= F(13) \delta(1-2) \delta(3-4) = \\ &= (2\pi)^{-4} \int G(q) \exp[iq(1-3)] dq \delta(1-2) \delta(3-4), \end{aligned}$$

(*) Fra i processi diretti tra fermioni è stato scelto il processo (17) dato che in esso, per grandi numeri atomici del nucleo catturante, intervengono particelle con energie abbastanza elevate per far sperare che l'effetto di una eventuale non localizzabilità delle interazioni possa dar luogo a conseguenze apprezzabili.

di modo che

$$(20) \quad M_{\text{catt}} = g \int \bar{\psi}_N(1) \Omega \psi_P(1) \bar{\psi}_\nu(3) \Omega \psi_\mu(3) F(13) d(13),$$

e ciò equivale a sostituire il grafico (b) al grafico (a) in fig. 1.

Se, inoltre, si suppone che, sia prima che dopo l'interazione, le particelle interagenti si trovino in stati stazionari, si ha

$$(21) \quad \begin{aligned} \bar{\psi}_N(1) &= \bar{\varphi}_N(\mathbf{x}_1) \exp[iE_N t_1]; & \psi_P(1) &= \varphi_P(\mathbf{x}_1) \exp[-iE_P t_1]; \\ \bar{\psi}_\nu(3) &= \bar{\varphi}_\nu(\mathbf{x}_3) \exp[iE_\nu t_3]; & \psi_\mu(3) &= \varphi_\mu(\mathbf{x}_3) \exp[-iE_\mu t_3]. \end{aligned}$$

Sostituendo allora le (19) e (21) nella (20), dopo elementari passaggi, si ricava:

$$(22) \quad M_{\text{catt}} = 2\pi \delta(E_N - E_P - E_\nu - E_\mu) g \int \bar{\varphi}_N(\mathbf{x}_1) \Omega \varphi_P(\mathbf{x}_1) \varphi_\nu(\mathbf{x}_3) \Omega \varphi_\mu(\mathbf{x}_3) \cdot F(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3, \eta) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_3,$$

in cui

$$(23) \quad \begin{aligned} F(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3; \eta) &= (2\pi)^{-3} \int G(\bar{q}, q_0 \equiv \eta) \exp[i\bar{q} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3)] d\bar{q}, \\ \eta &= E_N - E_P = E_\mu - E_\nu. \end{aligned}$$

Siccome $G(q)$ deve essere una funzione invariante, essa potrà solo dipendere da q^2 (o, eventualmente, dal segno di q_0).

Consideriamo due casi particolari:

I caso:

$$(24) \quad G(q) = \frac{m^2}{q^2 + m^2 - i\alpha^2} = \frac{m^2}{q^2 + m^2 - \eta^2 - i\alpha^2},$$

dove α è reale, molto piccolo, avente le dimensioni dell'inverso di una lunghezza. Questo fattore di forma non appartiene a quelli che PAULI ⁽¹⁾ chiama della « classe normale ». È infatti evidente che esso equivale a porre nella (20)

$$(25) \quad F(13) = m^2 \Delta_m^c(1-3),$$

dove Δ_m^c è la nota funzione di Green invariante causale, introdotta da FEYNMAN e rappresentante la propagazione di un mesone virtuale di massa m e il cui carattere tensoriale è determinato da Ω . Questo mesone potrà venire osservato in uno stato reale (cioè potrà essere creato) solo se $\eta^2 \geq m^2$. Nel nostro caso, essendo sempre $q^2 + m^2 < \eta^2$ (= energia disponibile) esso dovrà permanere nello stato virtuale e ciò significa che il fattore di forma si comporta esattamente come se fosse della « classe normale », cioè rappresentasse una vera e propria non localizzabilità dell'interazione.

Si può ancora osservare che se tutte le quattro ψ rappresentassero nucleoni, la (20) con la (24) darebbe notoriamente (a meno di eventuali termini di scambio) l'elemento di matrice di scattering elastico di due nucleoni, descritto tramite un campo mesonico al second'ordine di approssimazione. Inoltre, si può mostrare che anche le correzioni radiative dello scattering potrebbero rientrare nel formalismo non locale. Infine, se come caso particolare, si assumesse un fattore di forma dipendente da quattro punti, anzichè da due, si ricadrebbe nel formalismo di KRISTENSEN e MÖLLER relativo all'interazione non locale tra nucleoni. Tutte queste diverse circostanze tendono a dimostrare come le teorie non locali nella loro forma attuale siano alquanto generali nel senso che si adattano, con una opportuna scelta del fattore di forma, a rappresentare particolari aspetti delle già note teorie locali. Il pregio delle teorie non locali potrebbe risiedere appunto in questa loro generalità, in quanto ci si può attendere che esse consentano di descrivere almeno qualche aspetto di una futura e più soddisfacente teoria fisica.

Riprendiamo ora l'equazione (24) e sostituiamola nella (23) e questa nella (22). Si ottiene facilmente, per l'elemento di matrice tridimensionale H_{catt} l'espressione:

$$(26) \quad H_{\text{catt}} = -\frac{m^2}{4\pi} g \int \bar{\varphi}_N(\mathbf{x}_1) \Omega \varphi_P(\mathbf{x}_1) \exp \left[\frac{\sqrt{m^2 - \eta^2} \mathbf{x}_{13}}{|\mathbf{x}_{13}|} \right] \bar{\varphi}_P(\mathbf{x}_3) \Omega \varphi_N(\mathbf{x}_3) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_3,$$

in cui

$$(27) \quad \mathbf{x}_{13} = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1;$$

il che significa che il fattore spaziale di forma, com'è ovvio, è una funzione che nel caso statico si riduce al potenziale di Yukawa. Si constata inoltre che per $m \rightarrow \infty$ la (26) si riduce alla

$$(28) \quad H_{\text{catt}} = g \int \bar{\varphi}_N(\mathbf{x}_1) \Omega \varphi_P(\mathbf{x}_1) \bar{\varphi}_P(\mathbf{x}_1) \Omega \varphi_N(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1,$$

cioè al noto elemento di matrice di Fermi della teoria dell'interazione di contatto.

Ci proponiamo ora di stabilire di quanto si discosta l'elemento di matrice (26) dall'elemento (27) nel caso in cui m sia finita. Siccome esiste la possibilità teorica che il tratto 1-3 del grafico (b) (fig. 1) possa essere interpretato come un mesone π virtuale, porremo per m^{-1} la lunghezza d'onda Compton del π . Se si assumesse l'ipotesi dell'interazione indiretta si otterrebbe per l'elemento di matrice la formula (26) con $e_2 e_3$, prodotto delle cariche pioniche del nucleone

e del mesone μ , al posto di $gm^2/4\pi$; ora siccome:

$$(29) \quad e_2 e_3 \sim \frac{m_\pi^2}{4\pi} g.$$

come mostrato da PUPPI (*), si può concludere che l'interazione indiretta si presenta come un caso particolare di interazione non locale.

Se ora indichiamo con \mathbf{k} l'impulso del neutrino, rappresentato da un'onda piana, e teniamo conto della (27), si ha:

$$(30) \quad \bar{q}_\nu(\mathbf{x}_3) = \bar{q}_\nu(\mathbf{x}_1) \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{13}] = \bar{q}_\nu(\mathbf{x}_1) \exp[-i|\mathbf{k}| |\mathbf{x}_{13}| \cos \vartheta],$$

e, per piccoli valori del numero atomico Z , sempre per la (27), può scriversi:

$$(31) \quad \varphi_\mu(\mathbf{x}_3) = \varphi_\mu(\mathbf{x}_1) \cdot \exp\left[-\frac{1}{a} \frac{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_{13}}{|\mathbf{x}_{13}|}\right], \quad (Z < \sim 35),$$

con

$$a = \frac{\hbar^2}{Ze^2\mu} = \text{raggio dell'orbita } K \text{ di Bohr del mesone } \mu.$$

Sostituendo queste relazioni nella (26) si ricava

$$(32) \quad H_{\text{catt}} = \frac{m^2}{4\pi} g \int \varphi_N(\mathbf{x}_1) \Omega \varphi_P(\mathbf{x}_1) \bar{\varphi}_\nu(\mathbf{x}_1) \Omega \varphi_\mu(\mathbf{x}_1) \frac{\exp[\sqrt{m^2 - \eta^2} |\mathbf{x}_{13}|]}{|\mathbf{x}_{13}|} \cdot \exp\left[-\frac{1}{a} \frac{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_{13}}{|\mathbf{x}_1|} - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{13}\right] d\mathbf{x}_{13} d\mathbf{x}_1.$$

Infine, eseguendo prima l'integrazione su \mathbf{x}_{13} e mediando sui valori dell'angolo $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{13})$ si ottiene:

$$(33) \quad H_{\text{catt}} = \left[\frac{m^2}{\sqrt{m^2 - \eta^2} + \frac{4}{\pi^2 a}} \right]^2 - H_{\text{catt}}^F, \quad (Z < \sim 35),$$

in cui H_{catt}^F espresso dalla (28), rappresenta l'elemento di matrice della interazione di contatto.

Per grandi valori di Z la (31) non è più valida. La funzione d'onda del μ^- nel nucleo non è più approssimabile con quella dell'idrogenoide, ma piuttosto con quella di un oscillatore armonico in quanto il μ^- spende praticamente

(*) G. PUPPI: *Nuovo Cimento*, **6**, 194 (1949).

tutto il suo tempo nell'interno del nucleo. Al limite per grandi Z la (31) deve perciò essere sostituita con

$$(31a) \quad \varphi_\mu(\mathbf{x}_3) = \varphi_\mu(\mathbf{x}_1) \exp[-b|\mathbf{x}_{13}|^2 - 2b\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_{13}], \quad (Z > \sim 35),$$

dove

$$b = [4aR^3]^{-1/2} \quad (R = \text{raggio del nucleo}).$$

Sostituendo questa relazione e la (30) nella (26), con un procedimento analogo a quello che dalla (32) ha condotto alla (33), si trova:

$$(33a) \quad H_{\text{catt}} = \frac{m^2 \cdot \exp\left[-\frac{b}{2m^2}\right]}{[\sqrt{m^2 - \eta^2} + 4\sqrt{b/\pi^2}]^2 + k^2} H_{\text{catt}}^F \quad (Z > \sim 35).$$

Osserviamo che mentre la (33) dipende da Z , la (33a) ne è indipendente e quindi quest'ultima può riguardarsi come il valore limite della (33) al crescere di Z .

Questa dipendenza da Z dell'elemento di matrice ottenuto in base alla ipotesi della non localizzabilità dell'interazione (o dall'essere il processo indiretto) si rispecchierà naturalmente anche sulla vita media di cattura τ , proporzionale al quadrato dell'elemento di matrice. Si potrà allora scrivere:

$$(34) \quad \frac{1}{\tau_{\text{non loc}}} = \chi(Z) \cdot \frac{1}{\tau_{\text{loc}}},$$

in cui τ_{loc} è la vita media calcolata con la ipotesi dell'interazione di contatto, la quale presenta la nota dipendenza da Z_{eff}^{-4} .

La funzione $\chi(Z)$, calcolata quadrando le (33) e (33a) è stata riportata in fig. 2. Si constata che l'ipotesi della non localizzabilità tenderebbe a far diminuire, al crescere di Z , la probabilità di cattura (cioè aumentare la vita media) rispetto alla legge Z_{eff}^4 .

Un tale aumento della vita media è stato effettivamente osservato da J. W. KEUFFEL e Coll. (9) ma in misura molto maggiore di quanto previsto

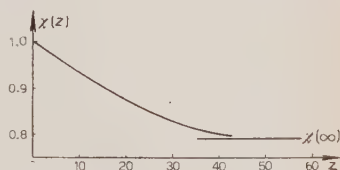


Fig. 2. - Fattore di riduzione $\chi(Z)$ della probabilità di cattura (formula (34)) nell'ipotesi dell'interazione non locale con $\lambda = 1.45 \cdot 10^{-13}$ cm.

(9) J. W. KEUFFEL, F. B. HARRISON, T. N. K. GODFREY e G. T. REYNOLDS: *Phys. Rev.*, **87**, 942 (1952).

dalla (33). Questo risultato sperimentale è stato d'altra parte ragionevolmente spiegato da J. KENNEDY ⁽¹⁰⁾ che ha dimostrato come lo scostamento dalla legge Z_{eff}^1 può essere attribuito all'esistenza di una struttura nucleare a shell. È quindi improbabile che a causa delle attuali incertezze sia sul valore sperimentale di τ che nella conoscenza della struttura nucleare, e quindi di Z_{eff} si possa rivelare o smentire l'effetto previsto dalla (34), per quanto non si possa escludere che ciò sia in futuro possibile.

II caso. — La trattazione di una non localizzabilità vera e propria (della « classe normale ») si potrebbe ottenere sostituendo, per esempio, alla (24) la:

$$G(q) = \frac{\lambda^{-4}}{\lambda^{-4} + q^4} = \frac{\lambda^{-4}}{\lambda^{-4} + (q^2 - \eta^2)^2}.$$

che soddisfa ai criteri di limitata durata dell'azione non causale di R. E. PEIERLS e M. CHRÉTIEN ⁽²⁾. È facile constatare che con questo fattore di forma si ottiene un risultato analogo a quello discusso nel I caso purché si ponga $\lambda \sim m^{-1}$.

Infine, se per λ si assumesse un valore più grande, la non localizzabilità dell'interazione risulterebbe più vistosa e questa circostanza (per quanto poco probabile) potrebbe forse venir presa in considerazione nell'interpretazione dell'effetto trovato da J. W. KEUFFEL.

5. — Conclusione.

Il formalismo covariante delle teorie non locali si presta soddisfacentemente ad essere applicato al caso dell'interazione diretta, non rinormalizzabile, tra campi spinoriali. In particolare questo formalismo può essere adattato a rappresentare alcuni aspetti delle teorie che descrivono l'interazione tra fermioni tramite campi di bosoni.

Nel caso particolare della cattura del mesone μ da parte del nucleo, la diversità tra gli elementi di matrice non locali (o d'interazione mesonica) e locale potrebbe essere suscettibile di verifica sperimentale.

È nostro gradito dovere ringraziare il prof. W. HEISENBERG per utili consigli e suggerimenti durante la prima fase del lavoro.

⁽¹⁰⁾ J. M. KENNEDY: *Phys. Rev.*, **87**, 953 (1952).

APPENDICE

Sviluppando la matrice S^{-1} secondo una serie di potenze analoga alla (12) e tenendo conto della sua unitarietà, si trovano immediatamente le seguenti relazioni:

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{(0)}^{-1} = S_{(0)} = 1 \\ S_{(1)}^{-1} = -S_{(1)}; \quad S_{(2)}^{-1} = S_{(1)}^2 - S_{(2)}; \quad S_{(3)}^{-1} = \{S_{(1)}, S_{(2)}\} - S_{(1)}^3 - S_{(3)} \\ S_{(4)}^{-1} = \{S_{(1)}, S_{(2)}\} - \{S_{(1)}, S_{(2)}\}S_{(1)} - S_{(1)}^2S_{(2)} + S_{(1)}^4 + S_{(2)}^2 - S_{(4)} \\ \dots \end{array} \right.$$

La (11) può essere scritta nella forma

$$\sum_0^{\infty} \psi_{j,(k)}^{\text{pa}} = \left(\sum_0^{\infty} S_j^{-1} \right) \psi_j^{\text{ar}} \left(\sum_0^{\infty} S_{(k)} \right),$$

da cui discendono le (14), eseguendo il prodotto delle due serie e tenendo conto delle (a). $\psi_{j(2)}^{\text{pa}}$, definita dalla terza delle equazioni (14), coincide con la $\psi_{j(2)}^{\text{pa}}$, ricavata da $\psi_{j(1)}^{\text{pa}}$, sostituendo in luogo delle ψ_j e $\bar{\psi}_j$ le (8a) e raccogliendo solamente i termini in g^2 . Quest'ultime esplicitamente si scrivono:

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_1(k) = \bar{\psi}_1^{\text{ar}}(k) + g \int S_1^{\text{rit}}(1-k) \Omega \psi_2(2) F(1234) \bar{\psi}_3(3) \Omega \psi_4(4) d(1234) \\ \bar{\psi}_1(k) = \bar{\psi}_1^{\text{ar}}(k) + g \int \bar{\psi}_4(4) \Omega \psi_3(3) F(1234) \bar{\psi}_2(2) \Omega S_1^{\text{ar}}(k-1) d(1234) \\ \psi_2(k) = \psi_2^{\text{ar}}(k) + g \int \bar{\psi}_4(4) \Omega \psi_3(3) F(1234) S_2^{\text{rit}}(2-k) \Omega \psi_1(1) d(1234) \\ \bar{\psi}_2(k) = \bar{\psi}_2^{\text{ar}}(k) + g \int \bar{\psi}_1(1) \Omega S_2^{\text{ar}}(k-2) F(1234) \psi_3(3) \Omega \psi_4(4) d(1234) \\ \psi_3(k) = \psi_3^{\text{ar}}(k) + g \int \bar{\psi}_1(1) \Omega \psi_2(2) F(1234) S_3^{\text{rit}}(3-k) \Omega \psi_4(4) d(1234) \\ \bar{\psi}_3(k) = \bar{\psi}_3^{\text{ar}}(k) + g \int \bar{\psi}_4(4) \Omega S_3^{\text{ar}}(k-3) F(1234) \bar{\psi}_2(2) \Omega \psi_1(1) d(1234) \\ \psi_4(k) = \psi_4^{\text{ar}}(k) + g \int S_4^{\text{rit}}(4-k) \Omega \psi_3(3) F(1234) \psi_2(2) \Omega \psi_1(1) d(1234) \\ \bar{\psi}_4(k) = \bar{\psi}_4^{\text{ar}}(k) + g \int \bar{\psi}_1(1) \Omega \psi_2(2) F(1234) \psi_3(3) \Omega S_4^{\text{ar}}(k-4) d(1234) \end{array} \right.$$

Siccome l'approssimazione del 1° ordine della matrice S è

$$(c) \quad \psi_j^{\text{pa}}(0) - \psi_j^{\text{ar}}(0) = -[S_{(1)}, \psi_j^{\text{ar}}(0)] = - \int S_j(0-j) \frac{\delta H_{\text{int}}}{\delta \bar{\psi}_j} d(j),$$

si trova, in virtù della definizione di $S_j(0-j)$ e delle (10)

$$(d) \quad S_{(1)} = -iH_{\text{int}}.$$

Per esempio per $j=1$ si ha:

$$(e) \quad \psi_{1(1)}^{\text{ps}} = g \int S_1(0-1) \Omega \psi_2(2) F(1234) \psi_3(3) \Omega \bar{\psi}_4(4) d(1234).$$

Sostituendo in (e) le (b) e raccogliendo i termini in g^2 si trova:

$$(f) \quad \psi_{1(2)}^{\text{ps}} = \frac{1}{2} g^2 \sum_k^3 \int S_1(0-1) \Omega \langle A_k(1) + (-1)^{k+1} B_k(1) \rangle d(1),$$

in cui si è tenuto conto che

$$(g) \quad \begin{cases} S_j^{\text{re}}(k-j) = \bar{S}_j(k-j) - \frac{1}{2} S_j(k-j) = -\frac{1}{2} [\varepsilon(k-j) + 1] S_j(k-j), \\ S_j^{\text{av}}(k-j) = \bar{S}_j(k-j) + \frac{1}{2} S_j(k-j) = -\frac{1}{2} [\varepsilon(k-j) - 1] S_j(k-j), \end{cases}$$

dove $\varepsilon(x)$ indica il segno di x_0 .

Le $A_k(1)$ e le $B_k(1)$ sono espresse da:

$$A_1(1) = \int \bar{\psi}_3^{\text{ar}}(8) \Omega \psi_3^{\text{ar}}(7) \varepsilon(2-6) S_2(2-6) \Omega \psi_1^{\text{ar}}(5) \psi_3^{\text{ar}}(3) \Omega \psi_4^{\text{ar}}(4) F(1234) F(5678) d(234567)$$

$$A_2(1) = \int \psi_2^{\text{ar}}(2) \bar{\psi}_4^{\text{ar}}(8) \Omega \varepsilon(7-3) S_3(7-3) \psi_2^{\text{ar}}(6) \Omega \psi_1^{\text{ar}}(5) \Omega \psi_4^{\text{ar}}(4) F(1234) F(5678) d(234567)$$

$$A_3(1) = \int \psi_2^{\text{ar}}(2) \psi_3^{\text{ar}}(3) \Omega \varepsilon(4-8) S_4(4-8) \Omega \psi_3^{\text{ar}}(7) \bar{\psi}_2^{\text{ar}}(6) \Omega \psi_1^{\text{ar}}(5) F(1234) F(5678) d(234567)$$

$$B_1(1) = \int \psi_4^{\text{ar}}(8) \Omega \psi_3^{\text{ar}}(7) S_2(2-6) \Omega \psi_1^{\text{ar}}(5) \psi_3^{\text{ar}}(3) \Omega \psi_4^{\text{ar}}(4) F(1234) F(5678) d(2345678)$$

$$B_2(1) = \int \psi_2^{\text{ar}}(2) \bar{\psi}_4^{\text{ar}}(8) \Omega S_3(7-3) \bar{\psi}_2^{\text{ar}}(6) \Omega \psi_1^{\text{ar}}(5) \Omega \psi_4^{\text{ar}}(4) F(1234) F(5678) d(2345678)$$

$$B_3(1) = \int \bar{\psi}_2^{\text{ar}}(2) \psi_3^{\text{ar}}(3) \Omega S_4(4-8) \Omega \psi_3^{\text{ar}}(7) \psi_2^{\text{ar}}(6) \Omega \psi_1^{\text{ar}}(5) F(1234) F(5678) d(2345678).$$

Definendo la matrice S del II ordine tramite la relazione:

$$(h) \quad S_{(2)} = \frac{1}{2} \sum_e^4 (Q_e + \bar{Q}_e) = \sum_e^4 T_e,$$

in cui

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= -g^2 \int \bar{\psi}_4^{\text{ar}}(8) \Omega \psi_3^{\text{ar}}(7) \bar{\psi}_2^{\text{ar}}(6) \cdot \\
 &\quad \cdot \Omega S_1^{\text{ar}}(5-1) \Omega \psi_2^{\text{ar}}(2) \bar{\psi}_3^{\text{ar}}(3) \Omega \psi_4^{\text{ar}}(4) F(1234) F(5678) d(12345678) \\
 \bar{Q}_1 &= -g^2 \int \psi_4^{\text{ar}}(4) \Omega \psi_3^{\text{ar}}(3) \bar{\psi}_2^{\text{ar}}(2) \cdot \\
 &\quad \cdot \Omega S_1^{\text{ar}}(1-5) \Omega \psi_2^{\text{ar}}(6) \bar{\psi}_3^{\text{ar}}(7) \Omega \psi_4^{\text{ar}}(8) F(1234) F(5678) d(12345678) \\
 Q_2 &= -g^2 \int \bar{\psi}_1^{\text{ar}}(1) \bar{\psi}_4^{\text{ar}}(8) \Omega \psi_3^{\text{ar}}(7) \cdot \\
 &\quad \cdot \Omega S_2^{\text{ar}}(2-6) \Omega \psi_1^{\text{ar}}(5) \bar{\psi}_3^{\text{ar}}(3) \Omega \psi_4^{\text{ar}}(4) F(1234) F(5678) d(12345678) \\
 \bar{Q}_2 &= -g^2 \int \bar{\psi}_4^{\text{ar}}(4) \Omega \psi_3^{\text{ar}}(3) \bar{\psi}_2^{\text{ar}}(6) \cdot \\
 &\quad \cdot \Omega S_2^{\text{ar}}(6-2) \bar{\psi}_3^{\text{ar}}(7) \Omega \psi_4^{\text{ar}}(8) \Omega \psi_1^{\text{ar}}(1) F(1234) F(5678) d(12345678) \\
 (i) \quad Q_3 &= -g^2 \int \bar{\psi}_1^{\text{ar}}(1) \Omega \psi_2^{\text{ar}}(2) \bar{\psi}_4^{\text{ar}}(8) \cdot \\
 &\quad \cdot \Omega S_3^{\text{ar}}(7-3) \bar{\psi}_2^{\text{ar}}(6) \Omega \psi_1^{\text{ar}}(5) \Omega \psi_4^{\text{ar}}(4) F(1234) F(5678) d(12345678) \\
 \bar{Q}_3 &= -g^2 \int \bar{\psi}_4^{\text{ar}}(4) \psi_1^{\text{ar}}(5) \Omega \psi_2^{\text{ar}}(6) \cdot \\
 &\quad \cdot \Omega S_3^{\text{ar}}(3-7) \Omega \psi_4^{\text{ar}}(8) \bar{\psi}_2^{\text{ar}}(2) \Omega \psi_1^{\text{ar}}(1) F(1234) F(5678) d(12345678) \\
 Q_4 &= -g^2 \int \psi_1^{\text{ar}}(1) \Omega \psi_2^{\text{ar}}(2) \bar{\psi}_3^{\text{ar}}(3) \cdot \\
 &\quad \cdot \Omega S_4^{\text{ar}}(4-8) \Omega \psi_3^{\text{ar}}(7) \bar{\psi}_2^{\text{ar}}(6) \Omega \psi_1^{\text{ar}}(5) F(1234) F(5678) d(12345678) \\
 \bar{Q}_4 &= -g^2 \int \bar{\psi}_1^{\text{ar}}(5) \Omega \psi_2^{\text{ar}}(6) \bar{\psi}_3^{\text{ar}}(7) \cdot \\
 &\quad \cdot \Omega S_4^{\text{ar}}(8-4) \Omega \psi_3^{\text{ar}}(3) \bar{\psi}_2^{\text{ar}}(2) \Omega \psi_1^{\text{ar}}(1) F(1234) F(5678) d(12345678),
 \end{aligned}$$

si trova, a meno di termini di iterazione di processi del I ordine che abbiamo trascurato, tenendo conto delle (10) e della relazione

$$[\psi_1^{\text{ar}}(0), S_1(5-1)] = -[\psi_1^{\text{ar}}(5), S_1(0-1)],$$

che

$$\begin{aligned}
 &[\psi_1^{\text{ar}}(0), S_{(2)}] - S_{(1)} \psi_{1(1)}^{\text{pa}} = \\
 &= \frac{1}{2} g^2 \sum_k \int S_1(0-1) \langle A_k(1) + (-1)^{k+1} B_k(1) \rangle d(1) = \psi_{1(2)}^{\text{pa}},
 \end{aligned}$$

cioè la $\psi_{j(2)}^{\text{pa}}$ definita dalla (f) si identifica con la $\psi_{fj(2)}^{\text{pa}}$ espressa dalla terza delle relazioni (14) qualora si assuma per $S_{(2)}$ la relazione di definizione (h).

La (h) può ora facilmente essere particolarizzata al caso locale assumendo per la funzione di forma l'espressione

$$F(1234) = \delta(1-2) \delta(1-3) \delta(1-4); \quad F(5678) = \delta(5-6) \delta(5-7) \delta(5-8).$$

Se nelle Q_e, \bar{Q}_e , espresse dalle (i), si sostituiscono in luogo delle S_j^{rit} e S_j^{av} le (g) e in luogo della S_j la terza delle (10), ciascuna di esse si scinde in quattro termini $Q_{e,\lambda}, \bar{Q}_{e,\lambda}$, dei quali quelli con $\lambda = 1, 2$ contengono la $\varepsilon(k-j)$ mentre quelli con $\lambda = 3, 4$ non la contengono. Allora tenendo conto che $\varepsilon(k-j) = -\varepsilon(j-k)$ si ha:

$$\sum_{\lambda}^4 \sum_1^4 (Q_{e,\lambda} + \bar{Q}_{e,\lambda}) = \sum_2^3 (Q_{e,1} + \bar{Q}_{e,1}) = 0.$$

Indicando con x il punto $x^{(1)} \equiv x^{(2)} \equiv x^{(3)} \equiv x^{(4)}$ e con x' il punto $x^{(5)} \equiv x^{(6)} \equiv x^{(7)} \equiv x^{(8)}$ si ottiene

$$\begin{aligned} S_{(2)}^{\text{locale}} &= \frac{1}{2} \sum_1^4 (e-2)(e-3)(Q_{e,1} + \bar{Q}_{e,1}) = \\ &= -\frac{ig^2}{4\pi^2} \int ([H(x), H^*(x')] - [H(x'), H^*(x)]) \varepsilon(x-x') dx dx', \end{aligned}$$

che non è altro che l'elemento di matrice calcolato con il metodo di SCHWINGER ⁽¹¹⁾.

SUMMARY

A non local, relativistically invariant, treatment of the renormalizable interaction between Fermi particles is given. Following the Kristensen and Möller's schema a theory is outlined starting from the Lagrangian interaction (3), where F is an arbitrary, invariant form factor depending on four space-time points. The S -matrix in the Heisenberg representation is defined through the relation (11), where ψ^{in} and, respectively, ψ^{out} mean the out and in-going fields, which are defined by Eqs. (9). The out-fields and the right hand side of Eq. (11) are expanded in power series, then, by the aid of the usual procedure, the S -matrix is derived to the first (Eq. (15)) and to the second (Eq. (16)) approximation. The formalism is applied to the study of the first order process $\mu^- + P \rightarrow N + \nu$ (§ 4). In this case it is sufficient to take a two-points form factor (formula (19) and Fig. 1b). With the choice (24) of the Fourier transform of the form factor (which although not of the «normal class» in our case gives the same results as the normal one) the formalism becomes the same as if one would have supposed the considered process to be $\mu^- + P \rightarrow \mu^- + \pi + N \rightarrow N + e$. The effect of the non localizability of the interaction (with $\lambda = 1.4 \cdot 10^{-13}$ cm) on the life time of the capture of the μ^- is described by the formula (34) where $\tau_{\text{non loc}}$ and τ_{loc} mean the non local and the local life time. The reduction function versus Z is plotted in fig. 2. The possibility of verifying the calculated effect is discussed.

⁽¹¹⁾ J. KAMEFUCHI: *Progr. of Theor. Phys.*, **6**, 175 (1951).

Produzione dei neutroni di bassa energia da parte della radiazione cosmica.

M. GALLI

Istituto di Fisica dell'Università - Bologna

(ricevuto il 25 Giugno 1953)

Riassunto. — Viene trattata in modo elementare la teoria della diffusione dei neutroni nell'atmosfera. Per rendere conto delle 3,5 catture in aria $\text{s}^{-1} \text{cm}^{-2}$ sotto i 0,4 eV calcolate da YUAN in base ai suoi dati sperimentali, supponendo che i neutroni vengano generati tutti a 4 MeV, si ricava che il numero totale dei neutroni generati deve essere $22 \pm 4 \text{ cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. Si ricava inoltre che il numero dei neutroni generati alla quota p ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-2}$) deve essere $0,218 (\exp [-p/157] - 0,8 \exp [-p/70]) \text{ s}^{-1} \text{g}^{-1}$ e che il numero di quelli che sfuggono dall'atmosfera non arriva al 10% dal totale dei neutroni generati.

Introduzione.

Nei calcoli del bilancio energetico ⁽¹⁾ della radiazione cosmica, alle nostre latitudini, è importante conoscere il numero dei neutroni prodotto nell'atmosfera, per tentare di valutare l'energia globale dissipata in eventi nucleari di bassa energia.

A tale scopo viene qui affrontato il problema della diffusione dei neutroni nell'atmosfera. Già altri autori ^(2,3,4,5), avevano trattato il problema della diffusione mostrando che una sorgente di neutroni della forma $Q \exp [-\mu p]$ poteva rendere conto abbastanza bene dell'andamento sperimentale delle catture fino ad una certa altezza. In questo lavoro si dà una soluzione del

⁽¹⁾ G. PUPPI: *Suppl. al Nuovo Cimento*, **10**, 115 (1953).

⁽²⁾ H. A. BETHE, C. KORFF, G. PLACZEK: *Phys. Rev.*, **57**, 573 (1950).

⁽³⁾ W. HEISENBERG: *Cosmic Radiation* (New York, 1946), cap. 14.

⁽⁴⁾ E. BAGGE K. FINCKE: *Ann. der Phys.*, **6**, 321 (1949).

⁽⁵⁾ W. O. DAVIS: *Phys. Rev.*, **80**, 150 (1950).

problema della diffusione dei neutroni nell'atmosfera che ci pare più accurata delle precedenti. Si ricava il numero dei neutroni prodotti a 4 MeV, si risale poi ad una forma della sorgente molto ben giustificata dalla fenomenologia finora nota e si fa una stima dei neutroni che sfuggono dall'atmosfera (albedo).

Trattazione elementare del problema della diffusione.

Useremo qui una maniera approssimata elementare per trattare la diffusione dei neutroni, che ci permetterà di arrivare rapidamente alla soluzione del nostro problema; si riconosce subito che tale approssimazione è valida entro le condizioni nelle quali è valida la teoria della «età» ^(6,7).

Sia $n(\varepsilon, z)d\varepsilon$ il numero di neutroni per unità di volume con energia logaritmica compresa fra ε e $\varepsilon + d\varepsilon$ ($\varepsilon = \lg(E/E_0)$; $E_0 = 1$ eV); λ il libero cammino medio per diffusione elastica nel mezzo considerato; ξ l'energia logaritmica media perduta per ogni urto; $q(\varepsilon, z) = nv\xi/\lambda$ il numero dei neutroni per secondo e per unità di volume che, rallentando, attraversa l'energia ε ; $q_0(\varepsilon, z)d\varepsilon$ il numero di neutroni che, per unità di volume e di tempo, nasce con energia compresa fra ε ed $\varepsilon + d\varepsilon$.

Se dS è un elemento di superficie normale all'asse z , detta $J_+(\varepsilon, z)dS$ la corrente di neutroni, per intervallo energetico unitario, che in ogni direzione attraversa dS nel senso negativo dell'asse z , si ha:

$$J_+(\varepsilon, z)dS = \int \frac{vn(\varepsilon, z)}{\lambda} dV \cdot \exp[-r/\lambda] \cdot \frac{dS \cos \vartheta}{4\pi r^2}.$$

Se per $z \sim \lambda$ si può scrivere

$$(1) \quad n(\varepsilon, z) \cong n(\varepsilon, 0) + zn'(\varepsilon, 0) + \frac{z^2}{2} n''(\varepsilon, 0),$$

allora:

$$(2) \quad J_+(\varepsilon, z) = \left[\frac{n(\varepsilon, 0)}{2} \lambda + \frac{n'(\varepsilon, 0)}{3} \lambda^2 + \frac{n''(\varepsilon, 0)}{4} \lambda^3 \right] \frac{v}{2\lambda},$$

dove r è la distanza dell'elemento dV dall'origine ed $\exp[-r/\lambda]$ è la probabilità che ha un neutrone di superare la distanza r senza urtare.

⁽⁶⁾ R. E. MARSHAK: *Rev. Mod. Phys.*, **19**, 185 (1947).

⁽⁷⁾ H. SOODAK e E. C. CAMPBELL: *Elementary Pile Theory* (New York, 1950), p. 15.

Analogamente la densità di corrente che attraversa dS nel senso positivo dell'asse z , sarà:

$$(3) \quad J_-(\varepsilon, z) = \left[\frac{n(\varepsilon, 0)}{2} \lambda - \frac{n'(\varepsilon, 0)}{3} \lambda^2 + \frac{n''(\varepsilon, 0)}{4} \lambda^3 \right] \frac{v}{2\lambda}.$$

La « densità di corrente netta », nel senso negativo dell'asse z , diviene allora:

$$J = J_+ - J_- = \frac{n'(\varepsilon, 0)}{3} v \lambda.$$

Nel rango di energie che dobbiamo considerare, la diffusione elastica dei neutroni è isotropa nel sistema baricentrico; non lo è invece nel sistema di laboratorio. Ciò ha come conseguenza che la diffusione avviene prevalentemente in avanti. Per tener conto di questo fatto, occorre sostituire nelle formule precedenti al posto di λ il libero cammino medio di trasporto $\lambda_t = \lambda \cos \bar{\vartheta} = \lambda(1 - 2/3A)$ ⁽⁸⁾.

L'equazione di diffusione dei neutroni si scriverà:

$$(4) \quad \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial \varepsilon} + q_0 - \frac{nv}{\lambda_c},$$

essa esprime che la variazione della densità nell'unità di tempo può essere dovuta a spostamento per diffusione, a perdita di energia, a nascita e a cattura (λ_c è il l.e.m. per cattura).

In condizioni stazionarie la (4) diviene:

$$(5) \quad \frac{\lambda_t \lambda}{3\xi} \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + \frac{\partial q}{\partial \varepsilon} + q_0 - \frac{\lambda}{\lambda_c \xi} q = 0.$$

Da questa, imponendo alla q di essere finita per $z \rightarrow \pm \infty$, per separazione di variabili si ottiene:

$$q(\varepsilon, z) = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(\varepsilon', \varepsilon)}{2\sqrt{\pi\tau(\varepsilon', \varepsilon)}} \int_{-\infty}^{\infty} q_0(\varepsilon', z') \exp[-(z'-z)^2/4\tau(\varepsilon', \varepsilon)] d\varepsilon' dz,$$

dove:

$$\tau(\varepsilon', \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\lambda \lambda_t}{3\xi} d\varepsilon,$$

⁽⁸⁾ H. SOODAK e E. C. CAMPBELL: *Elementary Pile Theory* (New York, 1950), p. 19.

è l'«età» del neutrone ϵ :

$$f(\epsilon', \epsilon) = \exp \left[\int_{\epsilon}^{\epsilon'} \frac{\lambda}{\lambda_c \epsilon} d\epsilon \right],$$

è la frazione dei neutroni partiti con energia ϵ' che arriva all'energia ϵ .

Siano A e B due mezzi omogenei separati da un piano, per i quali i liberi cammini medi per urto dei neutroni siano rispettivamente λ_A e λ_B . A parità di altre condizioni, se $p_A(n)$ è la probabilità che ha un neutrone di A di passare in B dopo n urti e $p_B(n)$ la probabilità che ha un neutrone di B di passare in A , è evidente che sarà:

$$p_A(n) = p_B(n).$$

Poichè il tempo necessario per n urti in A e in B è rispettivamente proporzionale a λ_A e λ_B , anche la probabilità di trovare un neutrone in A o in B sarà proporzionale a λ_A o a λ_B . Al limite, per $\lambda_B = 0$, in B non troveremo nessun

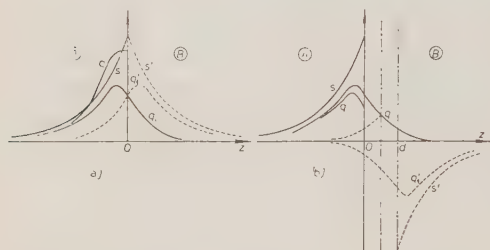


Fig. 1. — Distribuzione dei neutroni rallentati di data energia, generati dalla sorgente S e diffondentisi nel mezzo A limitato dal mezzo B . $a)$ $\lambda_B = 0$; $b)$ $\lambda_B = \infty$. S' è la sorgente virtuale; q_1 e q'_1 sono le distribuzioni dovute a S e S' ove si supponga $\lambda_B = \lambda_A$.

neutrone. Ciò significa che ogni neutrone che vada a finire in B vien subito rimandato indietro, cosicchè esso continua la sua diffusione all'indietro come avrebbe fatto se avesse potuto procedere in avanti e nello stesso mezzo. Dunque un mezzo per il quale sia $\lambda = 0$ si potrà considerare indifferentemente impenetrabile, oppure riflettente.

In questo caso la distribuzione dei neutroni in A (fig. 1a) si otterrà aggiungendo a quella che la stessa sorgente darebbe

nel mezzo omogeneo indefinito la distribuzione generata da una sorgente virtuale eguale a quella reale e ad essa simmetrica rispetto al detto piano di separazione. Quando invece, il mezzo A (fig. 1b) è limitato da un mezzo B perfettamente assorbente o trasparente ($\lambda = \infty$), ogni neutrone che oltrepassi il piano separatore non torna più indietro. Tale distribuzione differirà da quella nel mezzo indefinito per il fatto che viene a mancare il contributo dei neutroni che tornerebbero indietro. Per servirci di un procedimento simile al precedente, si può tentare di riprodurre nel mezzo indefinito, la distribuzione cercata, mediante l'aggiunta di una sorgente virtuale negativa, di forma

eguale alla reale, simmetrica ad essa rispetto ad un certo piano parallelo a quello di separazione, e il cui effetto sia proprio quello di annullare la corrente di quei neutroni che tornano indietro.

Ciò equivale a cercare (fig. 1 *b*) un punto d tale che sia

$$(6) \quad J_-(0) = J_+(d),$$

cioè, facendo uso di (2) e (3):

$$\frac{v}{2} \left[\frac{n(\varepsilon, 0) - n(\varepsilon, d)}{2} + \frac{n'(\varepsilon, 0) + n'(\varepsilon, d)}{3} \lambda_t + \frac{n''(\varepsilon, 0) - n''(\varepsilon, d)}{4} \lambda_t^2 \right] = 0.$$

Ora se, oltre ad essere valida la (1), si può scrivere:

$$n'(\varepsilon, d) \cong n'(\varepsilon, 0) + d n''(\varepsilon, 0),$$

allora d viene ad essere indipendente dalla forma di n , n' , n'' , e, se λ è indipendente da ε , assume il valore:

$$d = \frac{4}{3} \lambda_t.$$

Si può dunque concludere facilmente (figg. 1*a*, 1*b*) che la distribuzione cercata si può ottenere sommando alla distribuzione nel mezzo indefinito, generata dalla stessa sorgente, la distribuzione stessa riflessa nel piano separatore, oppure sottraendo alla stessa la distribuzione riflessa su un piano parallelo a quello separatore e distante da esso di

$$d/2 = (2/3) \lambda_t,$$

a seconda che il mezzo semiindefinito in discorso è limitato da un mezzo riflettente o da un mezzo assorbente.

Il problema della diffusione dei neutroni nell'atmosfera.

Usando nei nostri calcoli $q(\varepsilon, p)$ con p coordinata spaziale misurata in unità di pressione (g cm^{-2}) a cominciare dalla sommità, anziché in unità di lunghezza, il problema della diffusione dei neutroni nell'atmosfera diviene formalmente identico a quello della diffusione in uno strato piano indefinito di materiale omogeneo (atmosfera ridotta) limitato da un mezzo perfettamente riflettente e da uno perfettamente assorbente. Infatti, per quanto è stato detto precedentemente, se trascuriamo l'assorbimento, il suolo, rispetto all'atmosfera, si

può considerare riflettente per i neutroni, poichè il rapporto fra i rispettivi liberi cammini medi, che è dell'ordine del rapporto delle densità, è dell'ordine di grandezza delle migliaia. Superiormente, l'atmosfera ridotta si può pensare limitata da un mezzo riflettente o assorbente, a seconda che l'energia dei neutroni è minore o maggiore dei 0,65 eV appena necessari per poter sfuggire al campo gravitazionale terrestre. Dato il grado di approssimazione dei nostri calcoli, possiamo considerare l'atmosfera limitata superiormente da un mezzo assorbente anche al disotto dei 0,65 eV poichè a tale energia i neutroni sono quasi alla fine del loro cammino per giungere a 0,4 eV.

Da quanto si è detto precedentemente, se $q_1(\varepsilon, p)$ è la distribuzione generata da una sorgente stazionaria $q_0(\varepsilon, p)$ nel mezzo omogeneo indefinito, si vede facilmente che la distribuzione nel suddetto strato, e quindi anche nell'atmosfera, sarà data da:

$$(7) \quad q(\varepsilon, p) = q_1(\varepsilon, p) - q_1\left(\varepsilon, -p - \frac{4}{3}\lambda_t\right) + q_1(\varepsilon, 2p_0 - p),$$

(p_0 è la pressione al l.d.m.).

Dati sperimentali; andamento delle catture in aria e della distribuzione dei neutroni termici nell'atmosfera.

Un'accurata valutazione dell'andamento delle catture in aria, dei neutroni della radiazione cosmica sopra i 4 MeV non è possibile, poichè mancano i dati relativi alle sezioni d'urto di cattura. Però, per quanto riguarda il calcolo della produzione e dell'albedo, presumiamo di non commettere un grosso errore supponendo che tutti i neutroni vengano generati a 4 MeV ($\varepsilon_1 = \lg 4 \cdot 10^6$). Questi, infatti provengono da processi di knock-on e principalmente da processi evaporativi; in entrambi lo spettro energetico ⁽⁹⁾ ⁽¹⁰⁾, ha un massimo molto marcato proprio verso energie di tale ordine di grandezza, e diviene praticamente trascurabile verso energie di qualche decina di MeV.

Scegliamo poi 0,4 eV ($\varepsilon_t = \lg 0,4$) come energia d'arrivo dei neutroni rallentati, poichè i dati disponibili ⁽¹¹⁾ sono relativi a cattura sotto tale energia.

Usando i dati più recenti sulle sezioni d'urto per diffusione elastica e cat-

⁽⁹⁾ G. BERNARDINI, G. CORTINI e A. MANFREDINI: *Phys. Rev.*, **79**, 952 (1950).

⁽¹⁰⁾ G. PUPPI, V. DE SABBATA e E. MANARESI: *Nuovo Cimento*, **9**, 726 (1952).

⁽¹¹⁾ L. YUAN: *Phys. Rev.*, **81**, 176 (1951).

tura di neutroni da parte di N^{14} e O^{16} ⁽¹²⁾, e integrando graficamente, si trova:

$$\tau(\varepsilon_1, \varepsilon_t) = \frac{1}{3\xi(1 - 2/3A)} \int_{\varepsilon_t}^{\varepsilon_1} \lambda^2 d\varepsilon = \frac{1}{0,378} \int_{\varepsilon_t}^{\varepsilon_1} \left(\frac{22,79}{\sigma_s} \right)^2 d\varepsilon = 1370 \pm 260 \text{ g}^2 \text{ cm}^{-4},$$

avendo preso come numero medio di massa dell'aria $A = 14,47$ e

$$\xi = 1 - \frac{(A-1)^2}{2A} \lg \frac{A+1}{A-1} = 0,132.$$

Analogamente si trova:

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_t) = \exp \left[- \int_{\varepsilon_t}^{\varepsilon_1} \frac{\sigma_c}{\xi \sigma_s} d\varepsilon \right] = 0,177 \pm 0,037,$$

e

$$f(\lg 4 \cdot 10^6, \lg 0,4 \cdot 10^6) = 0,372 \pm 0,069;$$

cioè, trascurando l'albedo, circa il 63 % dei neutroni viene catturato fra 4 MeV e 0,4 MeV e circa il 19 % fra 0,4 MeV e 0,4 eV con legge $1/v$.

L'andamento delle catture $c(\varepsilon_t, p)$ $\text{g}^{-1} \text{s}^{-1}$ al disotto dei 0,4 eV si può identificare con buona approssimazione con $q(\varepsilon_t, p)$. Veramente ciò sarebbe esatto solo nel caso che i neutroni restanti fossero tutti catturati a 0,4 eV; dal momento però che, in media, i neutroni partiti da 0,4 eV, prima della cattura arrivano a 0,05 eV avendo tempo di urtare una decina di volte e perciò di allontanarsi in media di

$$\sim \sqrt{2\lambda^2 \cdot 10} \cong 10 \text{ g cm}^{-2},$$

l'andamento delle catture non deve differire molto dalla distribuzione effettiva. In ogni caso, per il numero totale $Q(\varepsilon_t)$ dei neutroni catturati sotto i 0,4 eV in un secondo e in una colonna di atmosfera di 1 cm^2 di sezione si ha che:

$$Q(\varepsilon_t) = \int_0^{p_0} c(\varepsilon_t, p) dp = \int_0^{p_0} q(\varepsilon_t, p) dp,$$

poichè ogni neutrone sotto i 0,4 eV può scomparire dall'atmosfera solo per cattura.

⁽¹²⁾ W. F. HORNYAK, T. LAURITSEN, P. MORRISON e W. A. FOWLER: *Rev. Mod. Phys.*, **22**, 291 (1950).

Forma della sorgente ed effetto di transizione.

Se supponiamo, come nei lavori precedenti, che si abbia:

$$(8) \quad q_0(\varepsilon, p) = Q_0 \exp[-\mu p] \delta(\varepsilon - \varepsilon_1),$$

troviamo:

$$(9) \quad q_1(\varepsilon, p) = \frac{f(\varepsilon_1, \varepsilon)}{2\sqrt{\pi\tau(\varepsilon_1, \varepsilon)}} \exp[\mu^2\tau - \mu p] \left[\Phi\left(\mu\sqrt{\tau} + \frac{p_0 - p}{2\sqrt{\tau}}\right) - \Phi\left(\mu\sqrt{\tau} - \frac{p}{2\sqrt{\tau}}\right) \right],$$

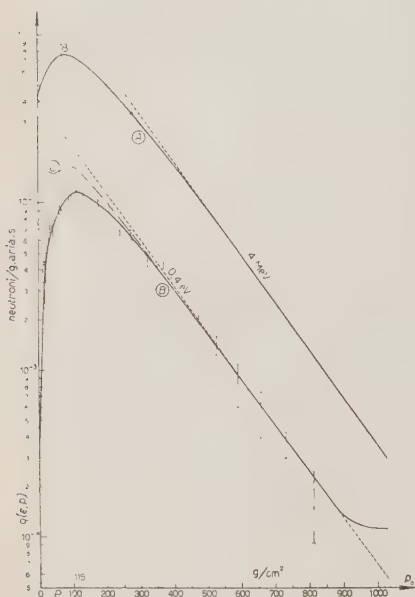


Fig. 2. — A: andamento della sorgente dei neutroni a 4 MeV: $q(\varepsilon, p) = 0,218 \exp[-p/157] - 0,8 \exp[-p/70]$. B: Andamento della distribuzione a 0,4 eV assumendo come sorgente la curva A. C: Andamento della distribuzione a 0,4 eV assumendo come sorgente $q(\varepsilon, p) = 0,218 \cdot \exp[-p/157]$. Dati sperimentali ottenuti da L. C. YUAN: *Phys. Rev.*, **81**, 176 (1951); **86**, 129 (1952).

dove Φ è la funzione degli errori.

Usando poi la (7) con $1/\mu = 157 \text{ g cm}^{-2}$ ⁽¹³⁾ e $\lambda = 2,60 \text{ g cm}^{-2}$ si ottiene a 0,4 eV la distribuzione di fig. 2 che si scosta notevolmente dall'andamento sperimentale delle catture ottenuto da YUAN, poichè presenta il massimo più elevato e più acuto.

Un accordo perfetto, entro gli errori sperimentali, si ottiene con una sorgente della forma analitica seguente:

$$(10) \quad q_0(\varepsilon, p) = \\ = q(\varepsilon, p) \delta(\varepsilon - \varepsilon_1) = Q_0 (\exp[-p/157] - \\ - 0,8 \exp[-p/70]) \delta(\varepsilon - \varepsilon_1).$$

Questa sorgente presenta un notevole effetto di transizione, cosa del resto che non stupisce, poichè indica che i neutroni sono prodotti, oltre che dalla nucleonica di alta energia, anche dai prodotti di questa.

YUAN recentemente ⁽¹⁴⁾ rielaborando i dati sperimentali, trova che sotto i 0,4 eV dovrebbe aversi

⁽¹³⁾ J. A. SIMPSON: *Phys. Rev.*, **76**, 1750 (1949).

⁽¹⁴⁾ L. YUAN: *Phys. Rev.*, **86**, 129 (1952).

$Q(\varepsilon_t) = 3,5$ neutroni catturati per cm^2 e per secondo. Se si ricava nella solita maniera $q(\varepsilon_t, p)$ usando la (11) e la (8) si ottiene:

$$Q_0 = 0,218 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

Il numero totale di neutroni prodotti a 4 MeV sarebbe dunque:

$$Q(\varepsilon_1) = \int_0^{p_0} q(\varepsilon_1, p) dp.$$

Il rapporto

$$\frac{Q(\varepsilon_t)}{Q(\varepsilon_1)} = \frac{3,5}{22} = 0,16 = f(\varepsilon_1, \varepsilon_t) \cdot 0,90,$$

ci dice che il numero totale dei neutroni che arriva a 0,4 eV è circa il 16% di quelli partiti da 4 MeV e che quelli arrivati risultano essere il 90% di quelli che arriverebbero se nessuno di essi sfuggisse dall'atmosfera.

Nei calcoli precedenti, abbiamo calcolato $d/2$ mediante un l.e.m. per diffusione in aria di $2,60 \text{ g cm}^{-2}$; in realtà questo l.e.m. al disopra di 1 keV ha andamento crescente. Se si osserva la fig. 1b si vede facilmente che il calcolo condotto con tale valore di d porta ad un valore un po' in difetto del numero dei neutroni arrivati a 0,4 eV; il 10% da attribuirsi all'albedo dei neutroni è quindi un valore un po' in eccesso. Inoltre se tutti i neutroni fuggiti fossero fuggiti a 4 MeV, allora la percentuale dei neutroni mancanti tra i partenti a 4 MeV sarebbe anche la percentuale dei neutroni mancanti all'arrivo a 0,4 eV, ma poichè tutti i neutroni sfuggono con energie intermedie, anche per questa ragione si può concludere che il 10% è un valore in eccesso per l'albedo dei neutroni.

Ringrazio vivamente il prof. G. PUPPI per le utili discussioni e i numerosi suggerimenti.

SUMMARY (*)

The theory of the scattering of neutrons in the atmosphere is elementary treated. In order to account for the 3,5 captures in air $\text{s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ at energies less than 0,4 eV calculated by YUAN basing on his experimental results, and supposing that neutrons are all generated at 4 MeV, one gets that the total number of generated neutrons must be $22 \pm 4 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. It results further that the number of neutrons generated at the height p (g cm^{-2}) must be $0,218(\exp[-p/157] - 0,8 \exp[-p/70]) \text{ s}^{-1} \text{ g}^{-1}$ and that the number of the neutrons which escape the atmosphere does not reach up to 10% of the total number of generated neutrons.

(*) Editor's translation.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Absorption Coefficient of Ultrasonics in some Liquid Determined by the New Thermal Technique.

S. PARTHASARATHY and P. P. MAHENDROO

National Physical Laboratory of India - New Delhi

(ricevuto il 18 Giugno 1953)

It has been shown earlier ⁽¹⁾ ⁽³⁾ that heat output at any point in a liquid medium due to passage of ultrasonic waves is dependent on the sound intensity at that point. Thus if I_x is the sound intensity at a point x cm from the source, the heat generated H_x is given by the relation

$$AI_x = JH_x,$$

where A is the area of the cross section of the sound beam and J is a constant of proportionality between sonic and thermal energies which has been shown ⁽²⁾ to have the same value as the mechanical equivalent of heat.

From this relationship, it follows that if H_x and H_0 are values of heat measured at two points on the axis of the sound beam, separated by a distance x , the

absorption coefficient of sound can be derived from the equation

$$H_x = H_0 \exp [-2\alpha x].$$

as shown in earlier papers ⁽¹⁾ ⁽³⁾.

The experimental set up was essentially the same as that used in our earlier work ⁽¹⁾. The calorimeter consisted of a double walled glass container with vacuum in the interspace with a thin mica window at the bottom. It could be raised or lowered by means of a rack and pinion arrangement through known distances. This calorimeter was immersed in a liquid for which the absorption coefficient was to be determined. Any highly absorbing liquid could be contained in the calorimeter, as its purpose was to get all the ultrasonic waves absorbed. We used a thermometer which could read up to 0.025 °C. The whole

⁽¹⁾ S. PARTHASARATHY, S. S. CHARI and P. P. MAHENDROO (under publication in *Journ. de Phys.*).

⁽²⁾ S. PARTHASARATHY, S. S. CHARI and D. SRINIVASAN: *J.A.S.A.*, March 1953.

⁽³⁾ S. PARTHASARATHY, S. S. CHARI and P. P. MAHENDROO (under publication in *Zeits. f. Naturforschung* for April 1953).

apparatus was enclosed in a wooden box packed with glass wool.

All the measurements were taken at about 5 MHz.

The usual precautions were taken to minimise heat losses. Finally corrections were applied for heat losses due to radiation and the gain in heat due to conduction of heat from the lower liquid in the beaker through the mica partition into the upper liquid.

The results are shown in the following Table. The values for frequency free absorption coefficient α/v^2 as determined by the new method are shown in column 3. The corresponding values obtained by radiation pressure method ⁽⁴⁾ are also shown in column 4 for purposes of comparison.

It is seen from these results that there is generally good agreement between values of absorption coefficient obtained by the new thermal technique with those obtained by the other methods in use so far.

⁽⁴⁾ S. PARTHASARATHY, S. S. CHARI and D. SRINIVASAN (under publication in *Journ. de Phys.*).

TABLE I. — Values of α/v^2 at about 5 MHz. (varying from 5 to 5.008 MHz).

Liquid	Temp. °C	$(\alpha/v^2) \cdot 10^{15}$ cm ⁻¹ s ² by the new method	$(\alpha/v^2) \cdot 10^{16}$ cm ⁻¹ s ² by radiation pressure method
1. Xylene	25.5	1.16	0.89 at 30 °C
2. Toluene	26.8	1.10	1.23 at 30 °C
3. Bromo- benzene	26.5	2.46	2.02 at 20 °C
4. Nitro- benzene	26.7	0.91	0.99 at 30 °C
5. Nitro- toluene	22.9	1.43	1.85 at 24 °C
6. Ethyl acetate	24.9	1.57	1.90 at 23 °C
7. Amyl acetate	23.3	2.41	2.34 at 25 °C
8. n-Butyl acetate	21.5	1.51	1.94 at 25 °C
9. n-Butyl alcohol	25.0	1.96	1.94 at 23 °C
10. Iso-butyl alcohol	24.1	3.16	2.49 at 23 °C
11. Iso-amyl alcohol	27.0	2.47	2.30 at 23 °C
12. Chloro- form	26.1	2.30	—

Renormalised two Particle Potential from Field Theory.

W. MACKE

Instituto de Física Teórica - São Paulo, Brasil

(ricevuto il 22 Giugno 1953)

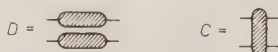
The transformation of the most general equation of Bethe and Salpeter

$$(1) \quad \Psi(W, p) = DC\Psi(W, p),$$

into a one time equation with four components of the form

$$(2) \quad Wa(\mathbf{p}) = \{\sqrt{m_1^2 + \mathbf{p}^2} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{p}^2} - V\}a(\mathbf{p}),$$

was presented first by the author in a public conference ⁽¹⁾ and described afterwards in a letter ⁽²⁾ and a more detailed paper ⁽³⁾. The operator DC consists of the totality of all Feynman graphs of the type illustrated below, composed of a disconnected part D , which contains also the unity, and a connected part C .

Fig. 1. - D and C graphs.

The interaction operator V is to be represented, as described in ⁽²⁾ ⁽³⁾, by a totality $G = \sum_{\nu=1}^{\infty} (DC)^{\nu}$ of Lévy graphs, which $V_{n\pi\pi}$, in addition to the topology of



Fig. 2. - Product graphs to be cut out.

⁽¹⁾ São Paulo, on April 9, 1953.

⁽²⁾ W. MACKE, sent to the *Phys. Rev.* on April 18, 1953, to appear in **91**, on July 1, 1953.

⁽³⁾ W. MACKE: *Zeits. f. Nat. forschung*, in appearance. This paper was sent to W. HEISENBERG on April 27, 1953, whom, as to G. LÜDERS, I wish to thank for valuable discussions of the results.

Feynman graphs, distinguish the sequence of all points from left to right. All those Lévy graphs, that allow a representation according to fig. 2 are to be excluded, if each of the two parts in fig. 2 has itself a topological structure like a graph of the totality G .

The analytical meaning of such a Lévy graph with $2n$ points, any topology τ and permutation π of the $2n$ points results from:

$$(3) \quad V_{n\tau\pi} = J^{n\tau} \frac{\lambda^n (-1)^R}{2\omega_1 \dots 2\omega_n} \frac{\Gamma_1 \dots \Gamma_{2n}}{\Delta E_1 \dots \Delta E_{2n-1}}.$$

The momentum integrations $J^{n\tau}$ are the same as those of the Feynman graphs, containing, however, only the space components $d\mathbf{k}_1, d\mathbf{k}_2, \dots$. The other terms are all described in detail in (2), (3).

The aim of deriving (2) from (1) was to obtain an equation (2) which in all its parts is unambiguous and free from divergences, hence allowing to calculate V up to every perturbation order, an aim which could not be attained by the equation derived from TAMM-DANCOFF-LÉVY (4), (5). The vacuum graphs being eliminated in (1), cannot contribute to (2) either, and all left to be done is to carry out the renormalisation, which will briefly be outlined hereafter. A more detailed representation may be found in (9).

It is proved first that the equations (1) and (2) could be derived, too, for more general field interactions, as e.g.:

$$(4) \quad H_W = -\delta m \bar{\psi}\psi - \delta\mu \frac{1}{2} \Phi^2 + (g - \delta g) \bar{\psi}\gamma\psi\Phi + \sum \zeta_i \Phi^i + \sum \eta_i \bar{\psi}\psi\Phi^i,$$

whilst formerly we supposed an H_W only, which corresponded to the third term of (4). Then for the points of the Feynman and Lévy graphs, there are created further topological conditions by each term of H_W , which are represented in fig. 3.

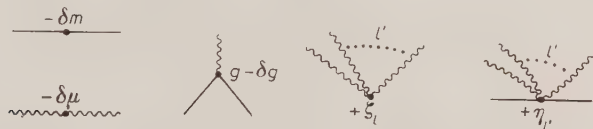


Fig. 3. — Topological conditions for the construction of graphs, related to an interaction H_W according to (4).

For the so-called «renormalisable field theories» the renormalisation can now be carried out according to DYSON (6). Divergent parts of graphs reproduced in

(4) M. LÉVY: *Phys. Rev.*, **88**, 72 (1952), further references to be found here or in (5), (9).

(5) Recently, M. CINI: *Nuovo Cimento*, **10**, 526, 615 (1953), demonstrated up to the fourth order of the coupling constant, that the «TDL»-equation can be brought into an invariant form of 16 components, and that the renormalisation might be treated in this form.

(6) F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **75**, 1736 (1949).

fig. 4 can be compensated in a well known way reducing them to the related parts of fig. 3, the divergences being contained only in the corresponding constants $-\delta m$, $+\delta\mu$, $+\delta g$, If now the interaction $g\bar{\psi}\gamma\psi\Phi$ is replaced by H_w of (4), then the



Fig. 4. — Examples for diverging parts of the graphs. Their exact number depends on the sort and coupling of the interacting mesons.

constants of (4) can be arranged in a way, that by summing up the graphs of fig. 3 and 4, all divergent parts fall out. Then the Feynman graphs do not contain any more divergence, and the Lévy graphs to be derived from them are necessarily also free of divergences.

To realize practically this procedure an invariant cut off procedure is introduced, as it has been given by FEYNMAN⁽⁷⁾, introducing one auxiliary mass M , or by the regularisation of PAULI and VILLARS⁽⁸⁾, who introduced a whole spectrum $\varrho(M)$ of auxiliary masses. Under this procedure all integrations come out to be convergent, but depending on M or $\varrho(M)$ resp. Along this way the values of δm , $\delta\mu$, δg , ... , related to each graph part from fig. 4 can be calculated as finite, but M -dependent quantities. With the so calculated constants, the graphs of fig. 3 are to be added to those of fig. 4. In so far, the renormalisation is already done. Now, the Feynman graphs of fig. 4 are to be regularised. The transformation of these regularised graphs into Lévy graphs does not make any further difficulty, because in this regard the regularisation consists only in adding further graphs with different auxiliary masses M . To these Lévy graphs we have to add the Lévy graphs resulting from fig. 3 with the constants, calculated in the way mentioned before. This sum of all Lévy graphs, related to fig. 3 and 4 must remain finite for $M \rightarrow +\infty$, because the DYSON program of renormalisation is now carried out for the operator V of (2).

The result consists in showing the way of renormalising V and in giving explicit prescriptions to calculate this operator as an unambiguous and finite one. A paper with more outlined explanations, full proofs and applications will be published soon⁽⁹⁾.

(7) R. FEYNMAN: *Phys. Rev.*, **76**, 749, 796 (1949).

(8) W. PAULI and F. VILLARS: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 434 (1949).

(9) W. MACKE: *Zeits. f. Naturforschung*, in appearance.

Further Results on the Interaction of Cosmic Rays Underground.

A. LOVATI, A. MURA, C. SUCCI and G. TAGLIAFERRI

Istituto di Scienze Fisiche dell'Università - Milano

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Milano

(ricevuto il 7 Luglio 1953)

In a previous communication ⁽¹⁾ we reported the negative result of an investigation intended to put in evidence $5 \cdot 10^{-29}$ cm²/nucleon in lead, corresponding to an interaction length of ~ 30 m of lead. Recently DEUTSCHMANN ⁽³⁾ also

TABLE I. — Summary of the most direct information thus far obtained by the cloud chamber technique on the production of penetrating secondaries by μ -mesons in lead.

To take into account the most reliable data, we consider only those experiments in which the expansions of the chamber were triggered by a simple counter telescope, and the interactions seen within the chamber. The criterion for acceptance is that the secondary should cross one lead plate ~ 15 g/cm² thick at least, without multiplying or scattering by more than very few degrees.

Authors	Method	μ -meson track length observed (metres of Pb)	No. of penetrating secondaries produced
BRADDICK <i>et al.</i> (series IV and V only) ⁽²⁾	Multiple-plate c.c., below ground	89	3
LOVATI <i>et al.</i> ⁽¹⁾	Multiple-plate c.c., below ground	352	1
WALKER ⁽⁵⁾	C.c. in magnetic field	$\sim 90^*$	0
DEUTSCHMANN ⁽³⁾	Multiple-plate c.c.	422	0
GEORGE <i>et al.</i> ⁽⁴⁾	C.c. containing 2 plates, below ground	$\sim 80^*$	3

* Estimated by the present writers.

the process claimed by BRADDICK, NASH and WOLFENDALE ⁽²⁾; that is, the production of penetrating secondaries by μ -mesons with a cross-section of about

reached a conclusion in close agreement with ours, while GEORGE, REDDING and

⁽³⁾ M. DEUTSCHMANN: *Zeits. f. Naturfor.*, **8a**, 308 (1953).

⁽¹⁾ A. LOVATI, A. MURA, C. SUCCI and G. TAGLIAFERRI: *Nuovo Cimento*, **10**, 105 (1953).

⁽⁴⁾ E. P. GEORGE, J. L. REDDING and P. T. TRENT: *Proc. Phys. Soc.*, **A 66**, 533 (1953).

⁽²⁾ H. J. J. BRADDICK, W. F. NASH and A. W. WOLFENDALE: *Phil. Mag.*, **42**, 1277 (1951).

⁽⁵⁾ W. D. WALKER: *Phys. Rev.*, **90**, 234 (1953).

TRENT (⁴) again confirmed the finding of a large cross-section. The most direct information thus far available on this point by the cloud chamber technique is summarized in table I.

During last winter and spring we

hope to increase the rate of collecting events with two or more penetrating particles, while having, in the same time, some chance of observing events, if any, produced by neutral agents. Above the chamber there was a layer of 175 g/cm² aluminium.

The present run yielded ~ 1100 photographs, taken at a rate of about one photograph per hour. Out of these pictures, 625 showed single penetrating particles within the solid angle of the counter telescope; 18, two or more penetrating particles; and 1 a nuclear disintegration whose primary could not be identified. The remaining photographs contained electron showers, or were blank. A typical picture of the most common chamber controlling event is reproduced in fig. 2.

The 625 single penetrating particles (presumably μ -mesons) on crossing the plates of the chamber show in two cases the production of a penetrating secondary (fig. 3 and 4; the criterion for acceptance is the same as in table I), while in three cases they cause nuclear disintegrations (one of them is reproduced in fig. 5). The μ -meson path length observed within the chamber, excluding the crossings of the lowest plate, was 62 m Pb. Let us assume that the penetrating secondaries, as originally reported by BRADDICK *et al.* (²), have a mean energy of the order of 10^3 eV. Comparison with our previous underground experiment, allowing roughly for the chamber receptive time, for the counter control selection and for the different geometry, shows that this corresponds to the production of one penetrating secondary in ~ 600 m Pb. On the other hand, if the same method of correction be applied with respect to the nuclear disintegrations containing three or more penetrating particles (these disintegrations being two out of the three quoted above), we would get one disintegration in ~ 1200 m Pb: that is, the value to be expected from the cross-section of GEORGE and EVANS for the

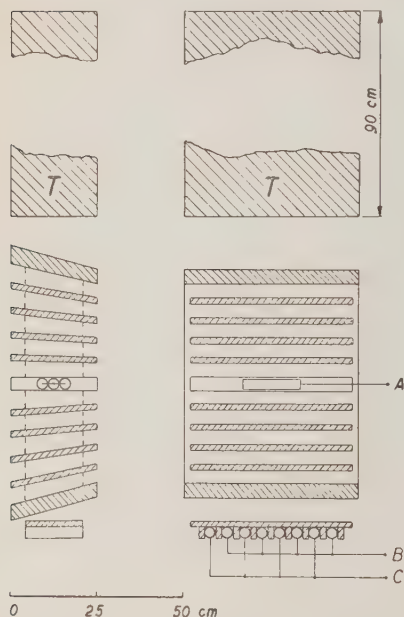


Fig. 1. - Layout of apparatus. The eight Pb plates inside the cloud chamber, as well as the one above the counter groups *B* and *C*, are 18 g/cm² thick each. *T* represents an aluminium layer of 175 g/cm². Threefold coincidences *A* + *B* + *C* (the counters of each group being in parallel) triggered the expansions of the chamber.

continued the research in our underground laboratory below 55 m w.e. of granite rock. This time the counter control of the cloud chamber was set to respond to showers: a group of counters was placed in the middle of the chamber (fig. 1), and put in coincidence with two groups of shielded counters below the chamber. By this arrangement we could

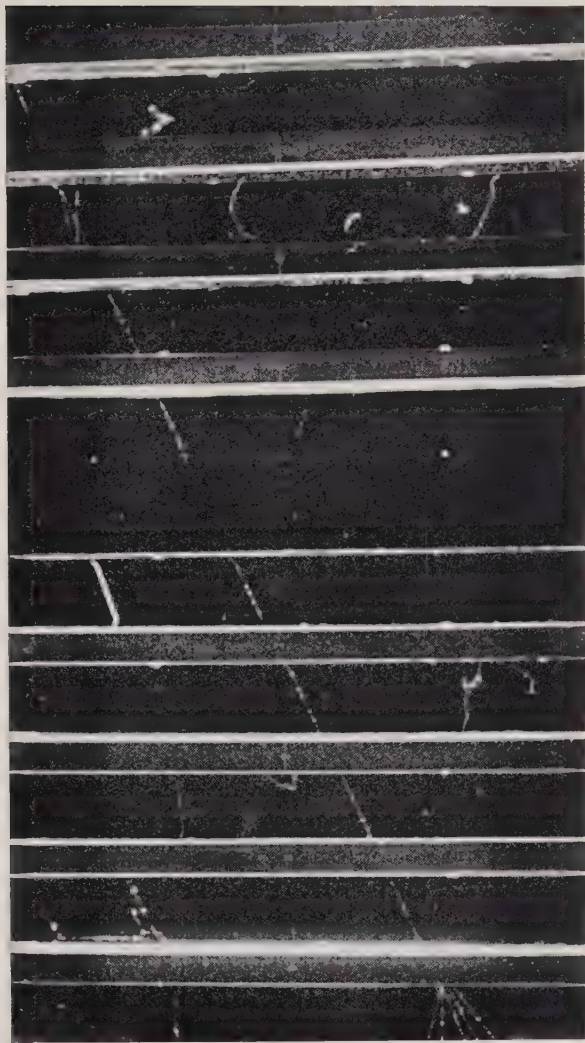


Fig. 2. - A representative example of the most common chamber controlling event. A single incident penetrating particle, after having crossed several Pb plates and discharged one *A*-counter, produces in the lower half-chamber a knock-on shower containing particles capable to reach the counters below the chamber.

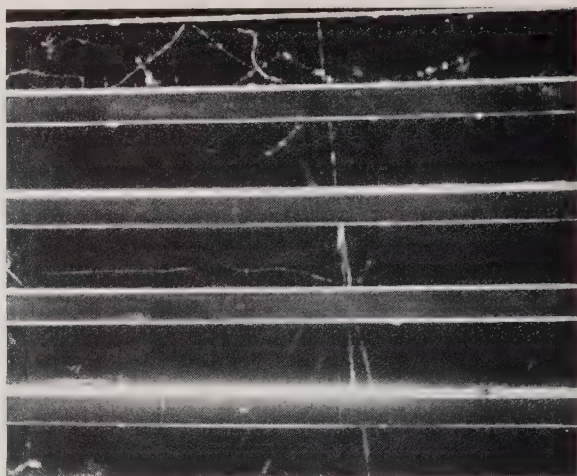


Fig. 3. - A penetrating particle shows to produce a penetrating secondary crossing one lead plate.

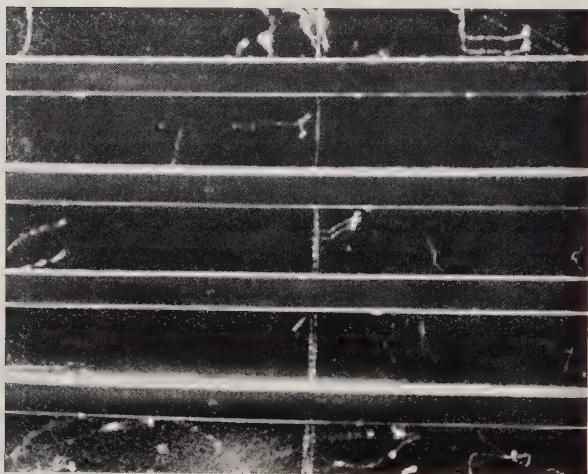


Fig. 4. - Small angle pair of associated penetrating particles caused by an ionizing incident particle. Both members of the pair cross two lead plates before leaving the chamber.

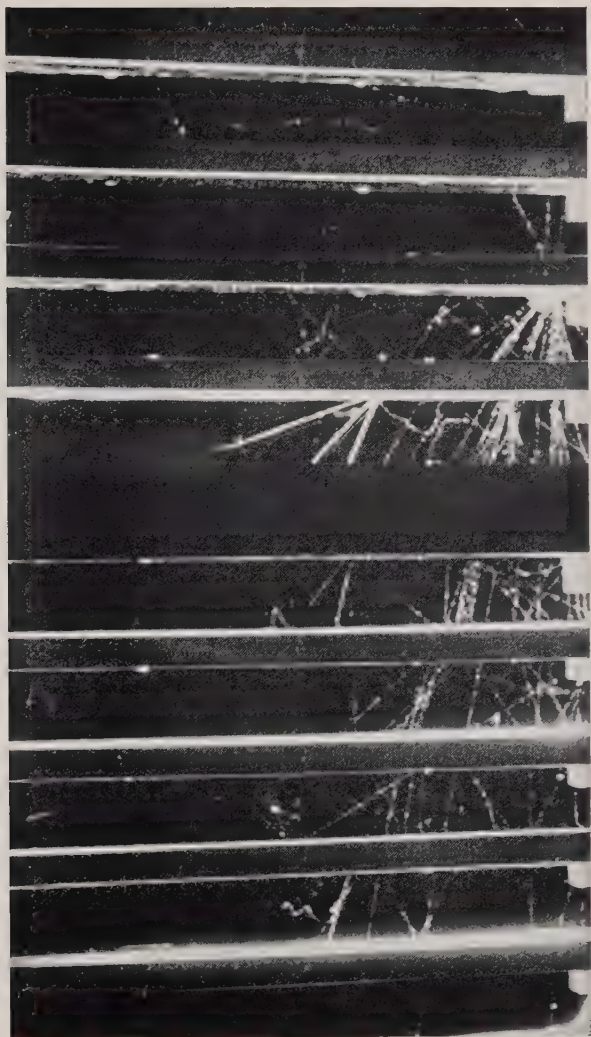


Fig. 5. — A nuclear disintegration produced by an ionizing particle in the 3rd plate. Stereoscopic examination of the event allows to recognize the emission of 2 heavily ionizing and 4 penetrating particles. There is evidence of the emission also of one π^0 -meson, as shown by the presence of two electron showers accompanying the disintegration. From the 4th plate one sees a low energy disintegration (showing 3 heavily ionizing particles) time coincident with the main event. (Events Pb 10 and Pb 10 bis).

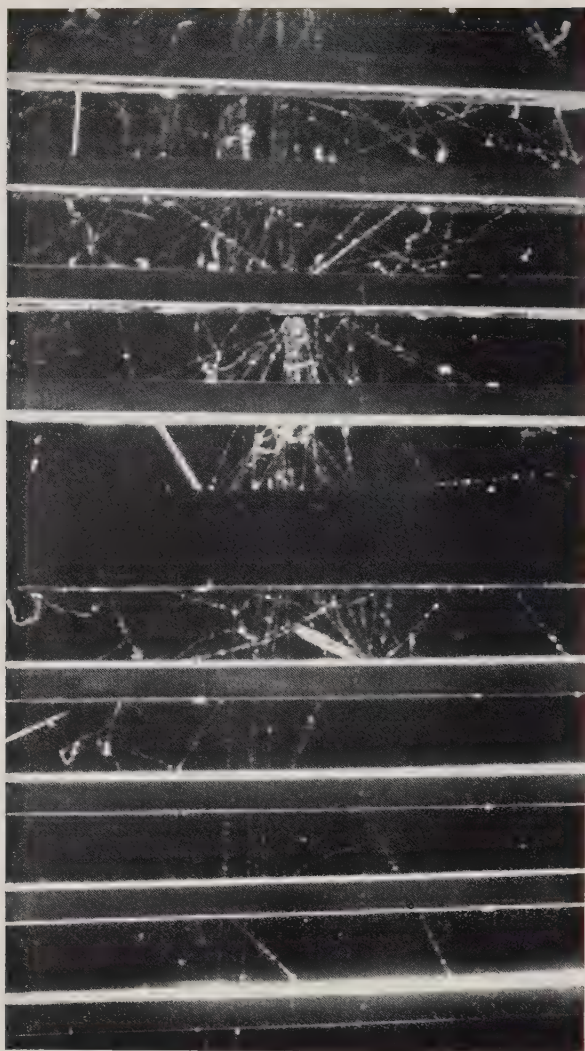


Fig. 6. - A penetrating shower produced in the aluminium *T* above the chamber manifests itself by means of 3 penetrating particles accompanied by a diffuse electron shower. One of the penetrating particles causes a secondary disintegration in the 3rd lead plate.
(Events Al 20 and Pb 20 bis).

same type of event ⁽⁶⁾ in photographic emulsion. Though we cannot rely upon the quantitative significance of the above figures, it seems to us worth pointing out that the comparison in the same experiment of the production rates of pe-

verging within the aluminium layer *T*, these events being respectively a nuclear disintegration (with 3 penetrating particles at least, cfr. fig. 6) and a pair of associated penetrating particles. These findings are not inconsistent with the

TABLE II. — *Nuclear Disintegrations.*

Event number Al=event produced in the aluminium above the chamber Pb=event produced in a lead plate inside the chamber	Producing particle	Numbers of emitted particles seen within the chamber: heavily ionizing + penetrating, near minimum ionizing	Notes
Pb 10	ionizing	2 + 4	Showing most probably the emission of one π^0 -meson (see fig. 5).
Pb 10 bis	non-ionizing	3 + 0	Event time-coincident with the Pb 10 above (see fig. 5)
Al 20	—	— ≥ 3	Accompanied by a diffuse electron shower (see fig. 6)
Pb 20 bis	ionizing	1 + 3	Caused by a penetrating particle of the event Al 20 above (see fig. 6)
Pb 41	unidentified	2 + 0	Event taking place within the core of an electron shower
Pb 46	unidentified	0 + ≥ 4	Accompanied by an electron side-shower
Pb 48	ionizing	2 + ≥ 4	—
Pb 51	ionizing	2 + 1	—

netrating secondaries and nuclear disintegrations does not support the assumption of quite different cross-sections.

The 18 photographs showing two or more time coincident penetrating particles contained: 10 of them, incoherent tracks; 6, almost parallel tracks (probably remnants of showers produced far above the apparatus); and 2, tracks con-

picture drawn from the interactions observed within the chamber.

Finally, we present in table II the data collected on nuclear disintegrations. Without entering a detailed analysis about the nature of the interacting particles, we only note that nuclear disintegrations below ground show over-all features similar to the ones exhibited by energetic cosmic ray nuclear encounters at mountain altitude. In particular, the observation of the electronic component accompanying sometimes these disin-

⁽⁶⁾ Cfr. E. P. GEORGE's article in «Progress in Cosmic Ray Physics», edited by J. G. WILSON (Amsterdam, 1952).

tegrations, and of secondary interactions, confirms the presence of π^0 -mesons and of N-rays among the particles emitted from underground events.

The conclusions we can draw from the experiments reported in this letter and in the preceding one (¹), are therefore the following:

- (i) It seems quite unlikely that the cross-section for the production of penetrating secondaries by μ -mesons should be appreciably higher than the one for nuclear disintegration production.
- (ii) Changing the producing layer above the chamber from lead to aluminium

does not appreciably affect the observed frequency of pairs of associated penetrating particles.

- (iii) No example of production of pair event by non ionizing agents has been observed.
- (iv) In agreement with photographic emulsion work, the presence of an energetic N-component secondary to μ -mesons is demonstrated by the cloud chamber method.
- (v) The emission of π^0 -mesons by cosmic ray induced underground disintegrations has been put in evidence.

Birifrangenza magnetica di sostanze paramagnetiche nelle condizioni di risonanza.

A. BATTAGLIA, A. GOZZINI e E. POLACCO

Istituto di Fisica dell'Università - Pisa

(ricevuto il 9 Luglio 1953)

Fenomeni di birifrangenza e dicroismo rettilinei sono stati previsti da KASTLER ⁽¹⁾ per un'onda polarizzata rettilineamente propagantesi in un dielettrico paramagnetico immerso in un campo magnetico statico parallelo al piano dell'onda, qualora il valore di quest'ultimo sia prossimo a quello di risonanza e la sua direzione non sia parallela nè ortogonale a quella del campo magnetico dell'onda. Il fenomeno, causato dalla condizione di ortogonalità fra i campi magnetici, statico e dell'onda, necessaria per la risonanza, si presenta particolarmente interessante per lo studio delle risonanze paramagnetiche.

L'esperienza è stata eseguita con onde TE_{11} in una guida a sezione circolare, contenente un sale paramagnetico, posta fra le espansioni di un elettromagnete ed eccitata in modo tale che il vettore elettrico, e la componente trasversale del vettore magnetico dell'onda formino col campo magnetico esterno un angolo di 45° .

In tali condizioni, decomposta la

componente trasversale del campo magnetico dell'onda incidente sul dielettrico in due componenti, di eguale ampiezza e fase, rispettivamente parallela e normale al campo esterno, solo quest'ultima subisce la risonanza paramagnetica, ed emerge dal dielettrico attenuata e sfasata rispetto alla componente parallela. Se il valore del campo esterno è quello di risonanza, la differenza di fase, conseguente alla differenza fra gli indici di rifrazione per le due componenti, è nulla; la differenza di ampiezza è massima, e l'onda TE_{11} che emerge dal dielettrico risulta polarizzata rettilineamente, col vettore elettrico ruotato rispetto a quello dell'onda incidente. Ai valori del campo esterno prossimi a quello di risonanza, a causa della differenza di fase, la radiazione emergente dal dielettrico risulta polarizzata ellitticamente.

La buona polarizzazione rettilinea del modo TE_{11} è stata ottenuta evitando, con una accurata lavorazione, piccole ellitticità nella sezione della guida, ed eccitando la guida stessa con un apparato polarizzatore opportuno ⁽²⁾. Con tali ac-

⁽¹⁾ A. KASTLER: *Compt. Rend.*, **231**, 1462 (1950); A. KASTLER: *Suppl. Nuovo Cimento*, **9**, 315 (1952); R. MALVANO: *Suppl. Nuovo Cimento*, **9**, 340 (1952).

⁽²⁾ G. L. RAGAN: *Microwave Transmission Circuits* (New York, 1948), p. 375.

corgimenti la eventuale ellitticità iniziale è risultata minore della minima rivelabile.

L'analisi dello stato di polarizzazione dell'onda emergente è eseguita mediante una antenna rettilinea, girevole attorno all'asse della guida, e che eccita una cavità risonante contenente un cristallo, seguito da amplificatore, secondo una tecnica simile a quella impiegata da RYTER ed altri nello studio della polarizzazione rotatoria magnetica ⁽³⁾.

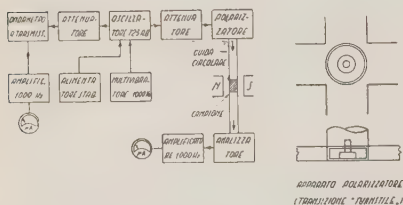


Fig. 1.

La sensibilità del nostro apparato, schematizzato in fig. 1, è di $1'$ nella misura della rotazione; la più piccola potenza rivelabile è $2 \cdot 10^{-8}$ watt, cosicchè, operando con una potenza incidente di 10^{-2} watt, la più piccola ellitticità della radiazione rivelabile è $P_{\min}/P_{\max} = 2 \cdot 10^{-6}$.

⁽³⁾ C. RYTER, R. LACROIX e R. EXTERMANN: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 539 (1950).

La fig. 2 rappresenta i risultati delle misure eseguite, alla frequenza di

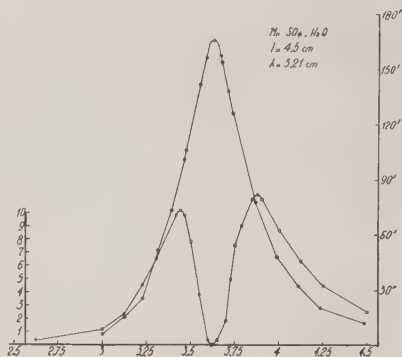


Fig. 2. — In ascisse è riportata la corrente circolante nel magnete, in ampere. In ordinate: •: angolo fra la direzione di massima intensità del campo elettrico dell'onda emergente e la direzione del campo elettrico dell'onda incidente sul dielettrico, misurato in minuti primi. Il senso della rotazione è tale che il campo elettrico dell'onda tende a disporsi perpendicolarmente al campo esterno. □: rapporto fra le potenze ricevute nelle direzioni di minima e di massima intensità, moltiplicato per $6 \cdot 10^4$.

9345 MHz su di un campione di solfato manganoso monoidrato, in polvere finissima, lungo 4,5 cm.

Ringraziamo vivamente il prof. A. KASTLER per i suggerimenti e l'interesse mostrato per il presente lavoro.

Disintegrazione in movimento di una particella pesante.

M. CECCARELLI e M. MERLIN

Istituto di Fisica dell'Università - Padova

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova

(ricevuto il 20 Luglio 1953)

Nell'osservazione di una lastra nucleare Ilford G5 di $600\ \mu$, esposta alla radiazione cosmica ad una latitudine di 34°N e ad un'altezza di 26000 metri

Dalla disintegrazione nucleare S (vedi fig. 1), composta di 11 rami fortemente ionizzanti e di un ramo « sottile, » emerge una particella formante un ramo « gri-

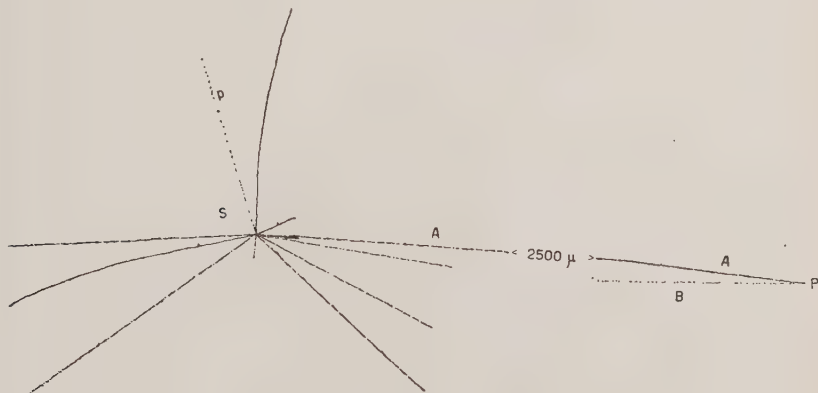


Fig. 1.

s.l.m. (*), è stato trovato un evento che interpretiamo come la disintegrazione in movimento di una particella carica pesante.

(*) La lastra è stata messa a nostra disposizione per gentile interessamento del prof. G. BERNARDINI, al quale rivolgiamo i più vivi ringraziamenti.

gio » A il quale, dopo un percorso di $3250\ \mu$ si interrompe nel punto P , dove prende origine una traccia sottile B lunga $4300\ \mu$. Le misure di ionizzazione-«scattering» indicano in modo sicuro che la particella A si muove da S verso P e che quindi non può essere considerata l'origine bensì un prodotto della disintegrazione S . L'evento interessante il

punto P non può quindi essere interpretato come una disintegrazione nucleare da cui siano originate le particelle A e B .

Esso potrebbe essere eventualmente interpretato come una coincidenza causale delle due tracce. Ma con una tale interpretazione contrastano i fatti che la particella A scompare in P con una velocità non nulla ($\beta = 0,23$) e che la particella B non può essere seguita al di là del punto B . Inoltre la particella B risulta di massa mesonica e perciò una sua origine isolata apparirebbe estremamente improbabile.

L'aspetto della disintegrazione S è del tutto normale rispetto a quello delle altre disintegrazioni avvenute nella lastra e perciò possiamo escludere che l'evento sia dovuto a qualche fenomeno « preistorico ». Riteniamo perciò di poter interpretare l'evento descritto come la disintegrazione in movimento di una particella pesante.

Per determinare la massa della particella A sono state scelte una decina di tracce di mesoni π e μ più lunghe di 1000μ ed altrettante tracce di protoni più lunghe di 5000μ . Determinata mediante conteggio di buchi riferito alle tracce dei mesoni e protoni, la velocità della particella A , la sua massa è stata determinata combinando questa con misure di scattering per tre sezioni indipendenti della lunghezza di 1000μ . È stata effettuata anche per i protoni un'analoga determinazione della massa, utilizzando ugualmente sezioni di 1000μ scelte ad un range dove la loro ionizzazione fosse simile a quella della particella A .

La fig. 2 mostra i valori ottenuti nelle tre determinazioni indipendenti della massa di A , unitamente alla misura della massa dei protoni di confronto. Si vede di qui che la massa di A appare dello stesso ordine della massa protonica e che assai difficilmente si lascerebbe ricondurre alla massa dei mesoni K ($990 m_e$).

Un'altra indicazione in questo senso, seppur molto più incerta, si può ottenere misurando la massa di A in funzione

della variazione di ionizzazione e di α in funzione della variazione di percorso.

Anche in questo caso risulta una massa dell'ordine della massa protonica.

Per quello che concerne la particella B , la sua massa è stata determi-

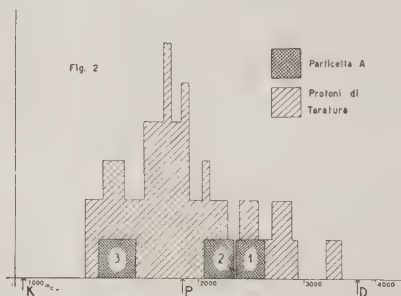


Fig. 2.

nata dalla densità dei grani e dei « blobs » in funzione di α . La particella B risulta essere assai probabilmente un mesone π .

Raccogliamo in una tabella i risultati delle misure effettuate sulle due tracce A e B .

La disintegrazione da cui la particella B ha origine non ha caratteristiche particolari. L'energia visibile messa in gioco, trascurando la traccia sottile troppo corta per essere misurata, che consideriamo prodotta dal primario, e la traccia A , è di soli 300 MeV circa.

Concludendo questa analisi siamo condotti a considerare la particella A come un esempio di particella instabile di massa superiore a quella dei mesoni K .

Pur non potendo ovviamente escludere in modo assoluto che si tratti invece di un mesone K siamo più propensi ad ammettere che questo evento sia dello stesso tipo di quello recentemente studiato da BONETTI *et al.* ⁽¹⁾, vale a dire che si tratti di una particella instabile di massa superiore a quella del nucleone.

(1) A. BONETTI, R. LEVI SETTI, M. PANETTI e G. TOMASINI: *Nuovo Cimento*, **10**, 345 (1953).

Angolo tra A e B : $8,8^\circ$		Angolo tra il primario della stella e A : 112°	
		Traccia A	Traccia B
Lunghezza		$3\,250\ \mu$	$4\,300\ \mu$
Massa		$2\,100 \pm 400\ m_p$	$286 \pm 30\ m_p$
Velocità nel punto P		$\beta = 0,23$	$\beta = 0,75$
Energia nel sistema del laboratorio . .		—	$70\ \text{MeV}$
Tempo di volo		$4,3 \cdot 10^{-11}\ \text{s}$	—
Energia nel sistema del baricentro . .		—	$108\ \text{MeV}$

Al Congresso Internazionale sulla Radiazione Cosmica tenutosi recentemente a Bagnères de Bigorre, il gruppo di Milano ha presentato un nuovo evento ⁽²⁾ simile a quello già pubblicato ⁽¹⁾. Anche per questo, come per il primo, è stata impossibile la determinazione dell'identità della particella secondaria; l'unico dato al riguardo è che la sua ionizzazione è prossima al minimo.

Un evento in tutto simile a quello da noi discusso è stato presentato da B. PETERS ⁽³⁾. Si tratta anche qui della disintegrazione in movimento di una particella carica di massa superiore a quella del nucleone originata da una disintegrazione nucleare.

I risultati di B. PETERS per i valori delle masse del primario e del secondario sono in ottimo accordo con quelli da noi ottenuti per l'evento sopra descritto.

Riteniamo perciò di poter interpretare questi due eventi ed i due eventi del gruppo di Milano con la reazione

$$\Omega^\pm \rightarrow \pi^\pm + N^0 + Q.$$

Ammettendo questa reazione otteniamo per l'energia di disintegrazione Q il valore di $131 \pm 24\ \text{MeV}$, dove il corrispondente valore trovato da B. PETERS è di $135 \pm 35\ \text{MeV}$.

Ci pare opportuno di mettere in evidenza che dei quattro eventi finora noti interpretabili con questa reazione, solo i due eventi del gruppo di Milano presentano decadimento a riposo. Negli altri due casi invece il decadimento si ha dopo tempi dell'ordine di $10^{-10}\ \text{s}$. Questa può essere una indicazione di una vita media assai corta e può quindi far comprendere perchè non siano stati finora osservati eventi simili in camera di Wilson.

Eventi che potrebbero essere interpretati come il decadimento di un « superprotone » in un protone ed un mesone neutro sono stati osservati in camera di Wilson da YORK *et al.* ⁽⁴⁾ ed anche, seppure con minore evidenza, da altri Autori. Sembra però che in questi eventi il valore dell'energia di disintegrazione Q sia dell'ordine di $40\ \text{MeV}$, mentre per i quattro eventi precedentemente menzionati esso risulterebbe assai più elevato.

È nostro gradito dovere di ringraziare il prof. ROSTAGNI, Direttore dell'Istituto, ed il prof. N. DALLAPORTA, per l'interesse con cui hanno seguito la ricerca e per gli utili suggerimenti.

Desideriamo inoltre ringraziare gli studenti F. PROCOPIO e G. SALANDIN per l'aiuto offertoci nell'effettuare le misure ed infine l'osservatore G. CALTABIANO che ha trovato l'evento in questione.

⁽²⁾ A. BONETTI *et al.*: *Rendiconti del Congresso sulla Radiazione Cosmica-Bagnères de Bigorre*, 1953.

⁽³⁾ B. PETERS: *Rendiconti del Congresso sulla Radiazione Cosmica-Bagnères de Bigorre*, 1953.

⁽⁴⁾ A. M. YORK *et al.*: *Phys. Rev.*, **90**, 167 (1953).

LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

H. KOLSKY - *Stress waves in solids*.
pp. 211+x, con 46 figg. e 3 tavole
Clarendon Press, Oxford, 1953,
fuori testo.

Lo sviluppo che hanno recentemente assunto le ricerche sulla struttura dei solidi, effettuate attraverso la misura della velocità o dell'assorbimento delle onde elastiche, rende opportuno il tentativo di dare un ordinamento sia pure provvisorio ai risultati analitici e sperimentali sinora ottenuti in questo campo.

La teoria matematica della propagazione delle onde elastiche di piccola ampiezza (parte I) serve logicamente di premessa alla parte di più diretto significato fisico, nella quale si illustra il comportamento anelastico dei solidi e la propagazione di onde di ampiezza finita. Prendendo addirittura come punto di partenza il tensore degli sforzi e quello delle deformazioni, si ricavano le equazioni linearizzate delle onde, trattando in maniera particolare la propagazione di oscillazioni estensionali, flessionali e torsionali lungo una sbarra. In questa parte ci si vale, più ampiamente di quanto non si faccia di solito, dei risultati ottenuti da POCHAMMER. Dato lo scopo della trattazione non sarebbe forse stato inopportuno qualche accenno alle vibrazioni di sistemi meno semplici (come cilindri,

anelli e sfere) ed inoltre alle vibrazioni flessionali delle piastre, od alle vibrazioni torsionali dei cilindri a sezione non circolare, in vista del loro impiego nelle ricerche sperimentali.

Nella seconda parte si ricordano le ipotesi di Voigt, di Maxwell e di Boltzmann sul comportamento anelastico dei solidi, accennando poi alla teoria di Zener sui fenomeni di rilassamento ed alle sue varie e numerose conferme sperimentali. A queste ultime ed alla tecnica con cui sono ottenute è dedicato un apposito capitolo, che però è lungi dall'esaurire l'argomento. Ad esempio, non è fatto cenno dei lavori sperimentali teorici effettuati in questo campo da CABARAT, LOCATI, BARONE o dei contributi teorici di MERCIER, e si può osservare che la bibliografia, per quanto riguarda i contributi di lingua italiana, si limita a quelli anteriori al 1948.

Stupisce inoltre che in una trattazione a carattere fisico non sia fatto cenno e della dipendenza delle costanti elastiche dalla temperatura, la quale ha una notevole importanza nella conoscenza della struttura dei solidi, ed appaiono strettamente legate alla teoria del calore specifico, come è stato indicato nei lavori di KÖSTEV e di altri.

Sembra inoltre discutibile voler comprendere in una trattazione unitaria i

solidi a struttura cristallina insieme a sostanze in parte o del tutto amorfe, come le gomme o alcune resine sintetiche, il cui comportamento ha in realtà ben poche analogie con quello dei solidi.

A conclusione della seconda parte, dopo aver illustrato le misure eseguite mediante sollecitazioni alternative, si dà notizia dei risultati conseguiti in regime transitorio, mediante onde d'urto di am-

piezza sufficiente in alcuni casi a provocare la rottura del solido.

In complesso, nonostante le lacune segnalate, dovute in gran parte al rapido succedersi delle ricerche in questo campo, il lavoro rappresenta una introduzione efficace e di semplice lettura, allo studio del comportamento elastico ed anelastico dei solidi.

P. G. BORDONI

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA
